МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ (ЗАДАНИЙ)

ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для программы подготовки специалистов среднего звена

по специальности

54.02.01 «Дизайн (по отраслям)»

Щелково, 2022 г.

УТВЕРЖДЕНО:
Приказ директора
№ 2 от 01 сентября 2022 г.

Протокол Педагогического совета
№ 1 от 01 сентября 2022 г.

СОГЛАСОВАНО:
Протокол Учебно-методического совета
№ 1 от 01 сентября 2022 г.

Составитель: АНО СПО КИТП

Методические рекомендации по выполнению практических работ (заданий) (далее – Методические рекомендации) предназначены для студентов, обучающихся по программе подготовки специалистов среднего звена по специальности 54.02.01 «Дизайн (по отраслям)».

Методические рекомендации разработаны в соответствии с требованиями ФГОС СПО к условиям реализации программы подготовки специалистов среднего звена. Методические рекомендации содержат пояснительную записку, содержание практических работ, информационное обеспечение.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.

Методические рекомендации по выполнению практических заданий/ лабораторных работ (Далее – Методические рекомендации) по учебной дисциплине составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО и рабочей программой учебной дисциплины **ЕН.01 Математика** для обучающихся по специальности **54.02.01 Дизайн (по отраслям)**.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать:

– значения математики в профессиональной деятельности;

– основных понятий и методов дифференциального исчисления: определение производной, таблицу производной, правила дифференцирования, определение дифференциала, использование его при решении прикладных задач;

– основные понятия и методы интегрального исчисления: определения, свойства и методы решения определенных и неопределенных интегралов;

– уравнения прямой, окружности, эллипса, параболы, гиперболы;

– основные понятия комбинаторики: факториал, размещение, сочетание, перестановка;

– основные понятия: событие, частота и вероятность появления события, полная вероятность, теорема сложения и умножения вероятностей, способы задания случайной величины; определения непрерывной и дискретной случайной величины; определение математического ожидания, дисперсии дискретной случайной величины; среднее квадратичное отклонение случайной величины;

– формулу бинома Ньютона;

– понятие множества, отношения; операции над множествами и их свойства;

– понятие графов и их элементов; виды графов и операции над ними

уметь:

– вычислять производные элементарных функций, используя справочные материалы, находить производную композиции нескольких функций, вычислять производные, применяя правилам дифференцирования;

– вычислять приближенные значения функций с помощью дифференциала;

– применять дифференциальное исчисление при решении прикладных задач профессионального цикла;

– вычислять неопределенные и определенные интегралы с помощью справочного материала;

– вычислять в простейших случаях площади плоских фигур, длину дуги кривой и объем тела с использованием определенного интеграла;

– решать простейшие задачи аналитической геометрии;

– решать простейшие комбинаторные задачи;

– решать практические задачи с применением вероятностных методов;

– оперировать с основными понятиями математической статистики, вычислять числовые характеристики случайной величины;

– решать практические задачи по теории множеств;

– решать практические задачи с помощью теории графов

формировать компетенции:

– ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

– ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

– ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

– ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

– ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

– ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

– ПК 1.4. Производить расчеты технико-экономического обоснования предлагаемого проекта;

– ПК 2.2. Выполнять технические чертежи;

– ПК 4.1. Планировать работу коллектива

– ПК 4.3. Контролировать сроки и качество выполненных заданий

Методические рекомендации по дисциплине предназначены для помощи обучающемуся при выполнении практических заданий и лабораторных работ на занятиях, и при подготовке к практическим и лабораторным занятиям.

Приступая к выполнению задания на практическом (лабораторном) занятий, обучающийся внимательно изучает цель и задачи занятия, знакомится с теоретическими и учебно-методическими материалами по теме практического (лабораторного) занятия, и отвечает на вопросы для закрепления теоретического материала.

Каждое описание практической работы содержит цель, перечень оборудования, порядок выполнения задания.

Подготовка к практическим занятиям заключается в изучении теории на занятиях теоретического обучения и самостоятельного изучения дополнительной, рекомендованной литературы, предусмотренной рабочей программой.

Практическая работа считается выполненной, если она соответствует критериям оценки:

Оценка «**отлично**» ставится если, студент демонстрирует:

– сформированность терминологического аппарата;

– владение системой знаний на уровне осознанного применения при выполнении учебных/ учебно-профессиональных действий;

– оригинальность решения, в том числе при решении нестандартных задач;

– гибкость, системность, глубину мышления;

– применение методов, адекватных поставленной цели и задачам;

–выполнение работы в логической последовательности;

– грамотное использование символики и графических средств;

– проявление высокого уровня самостоятельности;

– от 90% до 100% правильность выполнения практической работы.

Оценка «**хорошо**» ставится если, студент демонстрирует:

– сформированность терминологического аппарата;

– владение программным материалом для выполнения учебных/ учебно-профессиональных действий,

– применение освоенных алгоритмов в типовой (знакомой), ситуации;

– применение методов, адекватных поставленной цели и задачам;

– выполнение работы в логической последовательности;

– грамотное использование символики и графических средств;

– выполнение практической работы самостоятельное;

– правильность выполнения – от 70% до 89%.

Оценка «**удовлетворительно**» ставится если, студент демонстрирует:

– недостаточную сформированность терминологического аппарата;

– недостаточное владение программным материалом для выполнения учебных/ учебно-профессиональных действий;

– применение освоенных алгоритмов в типовой (знакомой), ситуации с незначительными нарушениями;

– применение нерациональных методов для выполнения практической работы;

–отступление от логической последовательности при выполнении работы;

– неточность использования символики и графических средств;

– проявление недостаточного уровня самостоятельности (выполнение работы с помощью преподавателя);

–правильность выполнения – от 51 % до 69%.

Оценка «**неудовлетворительно**» ставится если, студент демонстрирует:

– недостаточную сформированность либо несформированность терминологического аппарата;

– недостаточное владение программным материалом для выполнения учебных/ учебно-профессиональных действий;

– применение освоенных алгоритмов в типовой (знакомой), ситуации со значительными нарушениями;

– применение нерациональных методов для выполнения практической работы;

– нарушение логической последовательности при выполнении работы;

– неточность использования
символики и графических средств;

– проявление недостаточного уровня самостоятельности (выполнение работы с помощью преподавателя);

– правильность выполнения – менее 50 %.

Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для успешного прохождения промежуточной аттестации по учебной дисциплине, поэтому в случае отсутствия на занятии по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую работу, обучающийся должен устранить долг по данной работе.

2. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ.

Тема 1. Дифференциальное исчисление

Практическая работа №1 Нахождение производных

Содержание работы:

Формулы дифференцирования	
1. $(x^n)'=nx^{n-1}$	13. $(x^u)'=ux^{u-1}\cdot u'$
2. $(e^x)'=e^x$	14. $(e^u)'=e^u\cdot u'$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	15. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
4. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	16. $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$
5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	17. $(\log_a u)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
6. $(\sin x)'=\cos x$	18. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
7. $(\cos x)'=-\sin x$	19. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
8. $(tgx\{)'=\frac{1}{\cos^2 x}¿$	20. $(tgu\{)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'¿$
9. $(ctgx\{)'=-\frac{1}{\sin^2 x}¿$	21. $(ctgu\{)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'¿$
10. $(arctgx\{)'=\frac{1}{1+x^2}¿$	22. $(arcctgu\{)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'¿$
11. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	23. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
12. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	24. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

	.

Правила дифференцирования
1. $(c)'=0, (cu()'=cu';¿$ 2. $x' =1$ 3. $(u+v)'=u'+v';$ 4. 5.

Примеры вычислений :

1) $f(x)=3x^4+2x^2-5x+3$; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$

и правила $(cu)'=cu'$, $(u+v)'=u'+v';$ получаем

$f'(x)=(3x^4+2x^2-5x+3)')=(3x^4)'+(2x^2)'-(5x)'+(3)'=3(x^4)'+2(x^2)'-5(x)'+(3)'=3\cdot 4x^3+2\cdot 2x^1-5\cdot 1+0=12x^3+4x-5$

2) $f(x)=x^3\cos x$; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$ *и* $(\cos x)'=-\sin x$ и правило

получаем

$f'(x)=(x^3\cos x)'= (x^3)'\cos x+ x^3 (\cos x)'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x) =3x^2\cos x-x^3\sin x$

3) $f(x)=x^4 /\cos x$; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$ *и* $(\cos x)'=-\sin x$ и правило

получаем

$f'(x)=(x^4 /\cos x)'= ((x^4)'\cos x- x^4 (\cos x)')/\cos^2x=(4x^3\cos x-x^4(-\sin x))/ \cos^2x =(4x^3\cos x+x^4\sin x)/ \cos^2x$

Вариант 1.	***Вариант 2.***
Найдите производную	***Найдите производную***
1. $f(x)=3x^8+6x^3-7x+1;$	**1.** $f(x)=2x^6-9x^2+5x-8;$
2. $f(x)=5x^3\sin x;$	**2.** $f(x)=6x^4\cos x;$
3. $f(x)=6x^2\ln x$	**3**. $f(x)=2x^3\ln x$
4. *f’ (x) = ;*	**4**. *f’ (x) = ;*
5. $f(x) = \sin x-5\cos x +28x;$	**5**. $f(x) = \sin x-8\cos x +7x;$
6. $f(x) = -6$	**6.** $f(x) = +3.14$

Практическая работа

Дифференцирование сложных функций

Содержание работы:

Формулы дифференцирования

1. $(x^n)'=nx^{n-1}$	13. $(x^u)'=ux^{u-1}\cdot u'$
2. $(e^x)'=e^x$	14. $(e^u)'=e^u\cdot u'$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	15. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
4. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	16. $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$
5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	17. $(\log_a u)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
6. $(\sin x)'=\cos x$	18. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
7. $(\cos x)'=-\sin x$	19. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
8. $(tgx\{)'=\frac{1}{\cos^2 x}¿$	20. $(tgu\{)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'¿$
9. $(ctgx\{)'=-\frac{1}{\sin^2 x}¿$	21. $(ctgu\{)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'¿$
10. $(arctgx\{)'=\frac{1}{1+x^2}¿$	22. $(arcctgu\{)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'¿$
11. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	23. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
12. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	24. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

Правила дифференцирования

1. $(c)'=0, (cu\{)'=cu';¿$
2. $x'=1$
3. $(u+v)'=u'+v';$

4. 5.

Примеры вычислений :

1) f(x)=cos(3x^2+2) ; используя формулы $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$,

а потом $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$

получаем f'(x) =cos'(3x^2+2)· (3x^2+2)'= -sin(3x^2+2)·6x=-6x·sin(3x^2+2)

2) f(x)=e $^{7x+8}$; используя формулы ($(e^u)' = e^u \cdot u'$, а потом $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$

получаем f'(x) = (e $^{7x+8}$)'= e $^{7x+8}$·(7x+8)'= e $^{7x+8}$·7=7e $^{7x+8}$.

Вариант 1.	***Вариант 2.***
Найдите производную	***Найдите производную***
1. $f(x) = \sin(2x^2 - 3x + 1)$;	**1** . $f(x) = \cos(3x^2 - 4x + 2)$;
2 . $f(x) = \cos^3(2x - 1)$;	**2 .** $f(x) = \sin^3(2 - 3x)$
3 . $f(x)=6^{4x+1}$	**3 .** $f(x)=6^{4x+1}$
4 . $f(x)=(5x+7)^3$	**4** . $f(x)=(5x+7)^3$
5 .$f(x)=\log_2{}^4 x$	**5 .**$f(x)=\log_2{}^4 x$
6 . $f(x)=\ln^3 x$	**6.** $f(x)=\ln^3 x$

Практическая работа

Исследование функции методами

дифференциального исчисления

Общая схема исследования функции и построение её графика.

1. Найдите область определения функции.

2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.

3.Найдите точки пересечения графика функции с осями координат

4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.

5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.

6. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример исследования

Построить график функции: $f(x)= x^3+x^2-5x+3$

Исследование

1. $D(y) = R$
2. Исследование на четность

$f(-x)=(-x)^3+(-x)^2-5(-x)+3= -x^3+x^2+5x+3\neq f(x)$-четной не является

$f(-x)=-(x^3-x^2-5x-3) \neq -f(x)$-нечетной не является

Вывод: функция ни четная, ни нечетная; график не симметричен

1. Точки пересечения графика функции с осями координат

С осью ОУ: $x=0$, $y= 0^3+0^2-5\cdot 0+3=3$ **A(0;3)**

С осью ОХ: $y=0$, $x^3+x^2-5x+3=0$- уравнение имеет корни, но его решение представляет трудность.

4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.

Найдем производную: $f'(x)= (x^3+x^2-5x+3)' =3x^2+2x-5$

Найдем критические точки $f'(x)=0$, $3x^2+2x-5=0$

$D=b^2-4ac$, $D=2^2-4\cdot 3\cdot(-5)=4+60=64=8^2$

$x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{D})/2a$

$x_1=(-2+8)/2\cdot 3=1$, $x_2=(-2-8)/2\cdot 3=-5/3$-критические точки

Н анесем критические точки на числовую ось

+

-

+

-5/3

1

Так как старший коэффициент у производной положительный (при x^2 **3**x^2+2x-5 равен 3, а 3 больше нуля), то знаки на оси расставляем **как всегда справа**, но начиная **с плюса**.

Исследуемая функция на промежутке (-5/3; 1) убывает, а на промежутках (-∞;-5/3) (1;+ ∞)

возрастает.

Точка x = -5/3 – точка максимума, x = 1 – точка минимума

Найдем значения функции в критических точках..

Для этого подставим значения критических точек в функцию $f(x)= x^3+x^2-5x+3$

$f(-5/3)= (-5/3)^3+(-5/3)^2-5(-5/3)+3=-125/27+25/9+25/3+3=(-125+75+225)/27+3=175/27+3\approx 6,5+3\approx 9,5$

B(-5/3; 9,5)-максимум

$f(1)= 1^3+1^2-5\cdot 1+3=2-5+3=0$

C(1;0)-минимум

5. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости функции.

Для этого найдем вторую производную данной функции:

$f''(x)=(3x^2+2x-5)'=6x+2$

$f''(x)=0$; $6x+2=0$; $6x=-2$; $x=-2/6$; $x=-1/3$-точка подозрительная на перегиб

- +

-1/3

для , для

следовательно, график следовательно, график

функции на этом функции на данном

интервале выпуклый интервале выпуклый

вверх. вниз.

x = -1/3 - точка перегиба,

$f(-1/3)= (-1/3)^3+(-1/3)^2-5(-1/3)+3=-1/27+1/9+5/3+3=(-1+3+45)/27+3=47/27+3\approx 1,74+3\approx 3,7$

D=(-1/3; 3,7)

6. По полученным данным строим график

у

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	*Вариант 2.*
Построить график функции: **1.** **2.** $y =$	***Построить график функции:*** **1.** **2.** $y =$

Практическая работа

Дифференциальные уравнения первого порядка

Учебная цель: уметь решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными.

Учебные задачи:

1) провести математический диктант по дифференциальным уравнениям

2) совместно рассмотреть выполнение заданий на решение дифференциальных уравнений

3) выполнить задания на решение дифференциальных уравнений

Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:

Студент должен

уметь:

- решать дифференциальные уравнения с разделенными переменными

- решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

знать:

- таблицу основных неопределенных интегралов

- методы решения различных алгебраических уравнений

Задачи практической работы

1. Повторение теоретических основ темы «Дифференциальные уравнения»

2. Объяснение заданий на решение дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.

3. Самостоятельное выполнение заданий на решение дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными

Содержание работы:

Уравнением **с разделенными переменными** называется дифференциальное уравнение вида

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

с непрерывными функциями f(x) и g(y).

Равенство

где C — произвольная постоянная, определяет общий интеграл уравнения с разделёнными переменными.

Пример1. Решите дифференциальное уравнение **$y^4dy=6^{x}dx$**

Решение: $\int y^4dy=\int 6^{x}dx$

$y^5/5=6^x/\ln 6+C$

$y^5=5\cdot 6^x/\ln 6+C$

$y=\sqrt[5]{5\cdot 6^x/\ln 6+C}$ **Ответ:** $y=\sqrt[5]{5\cdot 6^x/\ln 6+C}$

Дифференциальное уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

или

Пример 2. Решите дифференциальное уравнение **$dy/y=x^{2}dx$**

Решение: $\int dy/y=\int x^{2}dx$

$\ln y=x^3/3+C$

$e^{\ln y}=e^{x^3/3+C}$

$y=e^{x^3/3+C}$ **Ответ:** $y=e^{x^3/3+C}$

Пример 3. Решите дифференциальное уравнение **$y'=5+x^3$**

Решение: т.к. $y'=dy/dx$

$dy/dx=5+x^3$

$dy=(5+x^3)dx$

$\int dy=\int(5+x^3)dx$

$y=5x+x^4/4+C$ **Ответ**: $y=5x+x^4/4+C$

Задания для самостоятельной работы:

I вариант:	II вариант:
Решите дифференциальные уравнения	***Решите дифференциальные уравнения***
1. $y^3dy=\cos x dx$ 2. $dy/y=4^x dx$ 3. $y'=1+x^2$	1. $y^2dy=\sin x dx$ 2. $dy/y=x^4dx$ 3. $y'=3-x^2$

Тема 2. Интегральное исчисление

Практическая работа

Вычисление определенного интеграла.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком функции y = f(x), снизу – осью Ox, слева и справа – прямыми x = a и x = b

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:

Пример вычислений 2:

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями , осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построим данные линии

Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: , ,

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***
Вычислите определенный интеграл	***Вычислите определенный интеграл***	***Вычислите определенный интеграл***
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями	***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями***	***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями***
$y = x^2+4x$, прямой $x=3$ и осями координат	$y = 2-x^2$, прямой $x=-1$ и осями координат	$y = 4x - x^2$, прямой $x=1$ и осями координат

Практическая работа

Нахождение неопределенного интеграла

Содержание работы:

Таблица основных неопределенных интегралов

1. 2. 3. 4. 5. 6.	7. 8. 9. 10. 11. 12.	13. 14. 15. 16.

Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

При непосредственном интегрировании применяются свойства неопределенного интеграла, таблица неопределенных интегралов и, если это необходимо, алгебраические преобразования

Пример вычисления 1:

Вычислите

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

Пример вычисления 2:

Вычислите

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	***Вариант 2.***
Вычислите интегралы 1. 2. *dx* 3. *dx* 4. *dx* 5. *dx*	*Вычислите интегралы* 1. 2. . *dx* 3. *dx* 4. *dx* 5. *dx*

Практическая работа

Интегрирование функций

Содержание работы:

Таблица основных неопределенных интегралов

1.	7.	13.

2. 3. 4. 5. 6.	8. 9. 10. 11. 12.	14. 15. 16.

1. Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

При непосредственном интегрировании применяются свойства неопределенного интеграла, таблица неопределенных интегралов и, если это необходимо, алгебраические преобразования

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример вычисления 1: С развернутым оформлением

Вычислите

Решение:

Введем новую переменную $t = 3x\text{-}4$, тогда , откуда . Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения $3x\text{-}4$ подставим t, вместо подставим).

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо t подставим выражение $3x\text{-}4$), получим окончательный ответ.

Пример вычисления 2:

С кратким оформлением

Решение:

3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям

$\int udv = uv - \int vdu$.

Пример вычисления 1:

С развернутым оформлением

Вычислить

Решение. Полагая, что

находим

Пример вычисления 2:

С кратким оформлением

Вычислить ∫ *(3x+2)lnxdx*

$)=(3x^2/2+2x)\ln x-\int(3x^2/2+2x)\,1/x dx=$

∫

$u=\ln x,\ du=(\ln x)'=1/x dx$

$dv=(3x+2)dx,\ v=\int(3x+2)dx=3x^2/2+2x$

$(3x+2)\ln x dx=($

$=(3x^2/2+2x)\ln x-\int(3x^2/2+2x)\,1/x dx=(3x^2/2+2x)\ln x-\int(3x/2+2)\,dx=(3x^2/2+2x)\ln x-3x^2/4-2x+C$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	***Вариант 2.***
Вычислите интегралы 1. 2. $\int \cos^8 x\sin x dx$ 3. $\int (3x-7)^9 dx$ 4. $\int (4x-5)\ln x dx$ 5. $\int x\sin x dx$	*Вычислите интегралы* 1. 2. $\int \sin^6 x\sin x dx$ 3. $\int (8x+5)^{12} dx$ 4. $\int (6x-3)\ln dx$ 5. $\int x\cos x dx$

Практическая работа

Вычисление определенного интеграла.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком функции y = f(x), снизу – осью Ox, слева и справа – прямыми x = a и x = b

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:

Пример вычислений 2:

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями , осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построим данные линии

Найдем точки пересечения графика функции с осью Ox: , ,

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***
Вычислите определенный интеграл	***Вычислите определенный интеграл***	***Вычислите определенный интеграл***
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями	***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями***	***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями***
$y = x^2+4x$, прямой x=3 и осями координат	$y = 2-x^2$, прямой x=-1 и осями координат	$y = 4x - x^2$, прямой x=1 и осями координат

Тема 3. Основы дискретной математики

АНО СПО «КИТП»

Практическая работа

Решение задач с применением теории графов

Теоретические сведения

Графические представления – удобный способ иллюстрации содержания различных понятий, относящихся к другим способам формализованных представлений (например, диаграммы Венна и другие графические иллюстрации основных теоретико-множественных и логических представлений).

Мощным и наиболее исследованным классом объектов, относящихся к графическим представлениям, являются так называемые графы, изучаемые в теории графов.

Теория графов – это раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами. Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы.

Теория графов многократно переоткрывалась разными авторами при решении различных прикладных задач.

1***. Задача о Кенигсбергских мостах.*** Обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку (рис. 3.1). Эта задача была решена Эйлером в 1736 году.

Рис. 1. Иллюстрация к задаче о Кенигсбергских мостах

2. ***Задача о трех домах и трех колодцах.*** Имеется три дома и три колодца. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались (рис. 3.2). Эта задача была решена Куратовским в 1930 году.

Рис.2. Иллюстрация к задаче о трех домах и трех колодцах

Предметом первых задач теории графов были различные конфигурации, состоящие из точек и соединяющих их линий. При этом несущественно: являются ли эти линии прямыми или кривыми, длинными или короткими, тонкими или толстыми; важно только то, какие точки они соединяют. Т.о. граф – это абстрактное математическое понятие.

Графом в математике называется картинка из точек, соединенных отрезками (более строгое определение существует, но на практике никогда не требуется). Эти точки называются *вершинами* графа, а отрезки (они могут быть и кривыми; некоторые графы вообще невозможно нарисовать так, чтобы все соединения были прямыми) - *ребрами* графа. Две вершины, соединенные ребром, называются *соседними*. Последовательность ребер, соединяющих две вершины, называется *путем*.
Одинаковые по структуре графы называются *изоморфными*, при этом они могут рисоваться совершенно по-разному. Точное определение изоморфизма: вершины обоих графов *можно занумеровать* так, что две вершины в одном графе соседние тогда и только тогда, когда соседние две вершины с теми же номерами в другом графе. Например, изоморфизм графов, изображенных внизу, внешне неочевиден, но проверяется по определению.

Степенью вершины в графе называется число выходящих из нее ребер. В ориентированном графе у каждой вершины есть *2 степени*: входящая (число ребер, входящих в вершину) и исходящая (число ребер, выходящих из вершины). Мы говорим, что вершина графа *четная*, если ее степень четна, и что вершина *нечетная* - в противном случае (в графе на рис. наверху все вершины четные). Для ориентированного графа понятие четности вершины обычно не вводится.
Назовем граф *связным*, если любые 2 вершины могут быть соединены *путем* из ребер. Несвязный

граф состоит из нескольких кусков, каждый из которых связен. Такие куски называются *компонентами связности*. Любой связный граф состоит из *одной* компоненты связности - *всего графа*. Например, граф на рисунке сверху состоит из двух компонент связности: одна содержит вершины с номерами от 1 до 8, а вторая - вершину с номером 9. В ориентированном графы есть разные виды связности: односторонняя и двухсторонняя. Относительно последней граф тоже разбивается на компоненты связности.

Способы задания графов

Существуют три эквивалентных способа задания графов: аналитический, геометрический и матричный.

Аналитический способ задания графов: Граф G(V,E) задан, если задано множество элементов V и отображение E множеств V в V. Отображение E может быть как однозначным, так и многозначным.

Геометрический способ задания графов: Множество элементов V графа G изображают кружками (это множество вершин), а отношение между ними – ребрами.

Матричный способ задания графов: Матрица, элементами которой являются нули и единицы, а также некоторое число m, называется матрицей смежности графа G(V,E) тогда и только тогда, когда её элементы образуются по следующему правилу: элемент , aij стоящий на пересечении vi – й строки и vj – го столбца, равен единице, если имеется ребро, идущее из вершины i v в вершину , j v и aij равен нулю в противном случае. Элемент aij равен единице, если при вершине i v имеется петля, и равен нулю в противном случае. Элемент aij равен некоторому числу m, где m – число рёбер графа, идущее из вершины i v в вершину j.

Эйлеровы графы.Понятие *эйлерова графа* связано со следующей задачей: можно ли нарисовать данный граф, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно по разу? А можно ли так сделать, чтобы в конце карандаш вернулся в первую нарисованную вершину? Оказывается, как установил в XVIII веке Леонард Эйлер, существует очень простой критерий разрешимости этой задачи.
(?) А можно ли нарисовать, не отрывая карандаша, два графа на рисунке внизу?

Эйлеровым путем в графе называется путь, проходящий по всем ребрам графа ровно по разу. Существование эйлерова пути как раз и означает, что граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно по разу. *Эйлеровым циклом* называется такой тип эйлерова пути, в котором начальная и конечная вершины совпадают (то есть, здесь образуется цикл и в нем начальной вершиной можно считать любую). Существование эйлерова цикла означает, что граф можно нарисовать еще и так, чтобы карандаш вернулся в первую нарисованную вершину. *Эйлеровым графом* для краткости называют граф, содержащий эйлеров путь или эйлеров цикл.

Критерий Эйлера: В связном графе существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда в нем *не более 2-х нечетных* вершин, а эйлеров цикл - тогда и только тогда, когда в нем *все вершины четные*.

Содержание практической работы

1. **Для данного графа:**

а) Составить матрицу смежности для графа.

б) Выписать вершины, смежные с вершиной 1.

в) Указать четные вершины графа

г) Составить матрицу инцидентности для графа.

д) Список ребер.

е) Указать ребра, инцидентные вершине 2.

2. Изобразите графически:

а) Неориентированное и ориентированное ребро;

б) Неориентированный граф G(V,E), заданный множеством V={v0, v1, v2, v3, v4, v5} E(v0)={v1,v2}={v0,v2,v4}; E(v1)={v0,v2,v4}; E(v2)={v0,v1,v5}; E(v3)={v4}; E(v5)={v2};

в) Плоский граф;

г) Полный неориентированный граф на трех, четырех и пяти вершинах;

д) Неполный ориентированный граф на пяти вершинах;

е) Петлю графа;

ж) Неориентированный и ориентированный мультиграф.

Тема 4. Основы аналитической геометрии

Практическая работа

Рассмотрим плоскость $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямую d, заданную точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{p}(p_1; p_2; p_3)$.

Существует три варианта взаимного расположения прямой и плоскости:

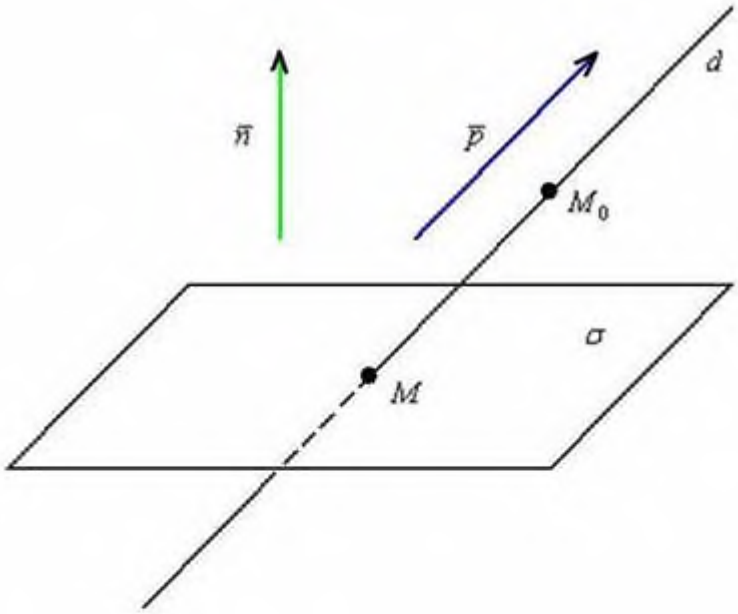
1) прямая пересекает плоскость в некоторой точке $M = d \cap \sigma$;

2) прямая параллельна плоскости: $d \parallel \sigma$;

3) прямая лежит в плоскости: $d \in \sigma$. Да, так вот нагло взяла, и лежит.

Как выяснить взаимное расположение прямой и плоскости?

Изучим аналитические условия, которые позволят нам ответить на данный вопрос. Выполним схематический чертёж, на котором прямая пересекает плоскость:

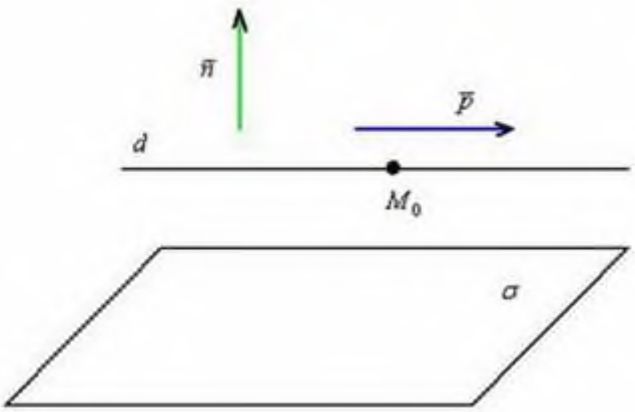


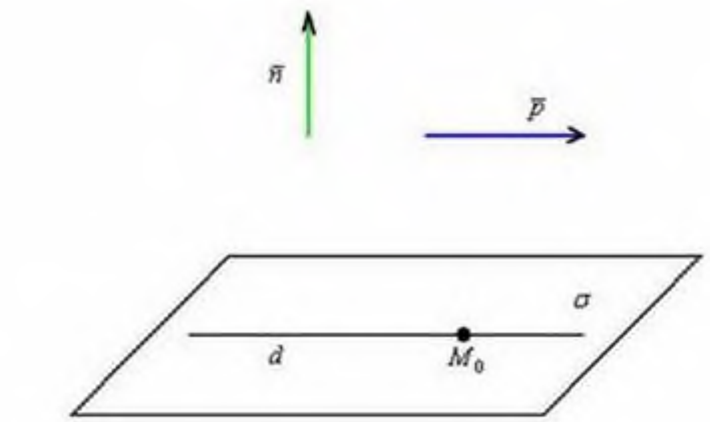
Прямая пересекает плоскость тогда и только тогда, когда её направляющий вектор $\bar{p}(p_1; p_2; p_3)$ не ортогонален вектору нормали $\bar{n}(A; B; C)$ плоскости.

Из утверждения следует, что **скалярное произведение** вектора нормали и направляющего вектора будет **отлично от нуля**: $\bar{n} \cdot \bar{p} \neq 0$.

В координатах условие запишется следующим образом:
$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0$

Если же данные векторы ортогональны, то есть если их **скалярное произведение** равно нулю: $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$, то прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в ней:





Разграничим данные случаи.

Если прямая параллельна плоскости, то точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (а значит, и ЛЮБАЯ точка данной прямой) не удовлетворяет уравнению плоскости: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

Таким образом, условие параллельности прямой и плоскости записывается следующей системой:

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

Если прямая лежит в плоскости, то точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (а, значит, и ЛЮБАЯ точка данной прямой) удовлетворяет уравнению плоскости: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Аналитические условия данного случая запишутся похожей системой:

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

Разборки с взаимным расположением прямой и плоскости достаточно примитивны – всего в два шага. Кроме того, на практике можно обойтись даже без значка системы. Исследование взаимного расположения прямых в пространстве, которое проводилось на уроке **Задачи с прямой в пространстве**, намного трудозатратнее. А тут всё проще:

Пример 1

Выяснить взаимное расположение прямой, заданной точкой $M_0(0; 5; -1)$ и направляющим вектором $\overline{p}(3; -2; 4)$, и плоскости $2x - 3y - 3z + 12 = 0$.

Решение: Вытащим вектор нормали плоскости: $\overline{n}(2; -3; -3)$.

Вычислим **скалярное произведение** вектора нормали плоскости и направляющего вектора прямой: $\overline{n} \cdot \overline{p} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = 6 + 6 - 12 = 0$, значит, прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в ней.

Подставим координаты точки $M_0(0; 5; -1)$ в уравнение плоскости:

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) + 12 = 0$$

$$0 - 15 + 3 + 12 = 0$$

$$0 = 0$$

Получено верное равенство, следовательно, точка M_0 лежит в данной плоскости. Разумеется, и любая точка прямой тоже будет принадлежать плоскости.

Ответ: прямая лежит в плоскости

Тема 5. Теория вероятностей и математическая статистика

Практическая работа

Решение практических задач с применением вероятностных методов.

Содержание работы:

1. Классическая вероятность события:

Вероятностью **P(A)** события **A** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m к общему числу n всех возможных элементарных исходов испытания, образующих полную группу, т.е **P(A) =**

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей.

Таким образом, вероятность любого события A удовлетворяет неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

Задача 1.

Из 25 экзаменационных билетов, занумерованных числами от 1 до 25, наудачу извлекается один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем?

Решение:

1. Всего 25 экзаменационных билетов. Следовательно, число всех возможных элементарных исходов испытания n=25.

2. Из 25 экзаменационных билетов, занумерованных числами от 1 до 25 чисел кратным трем всего 8 (3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24). Следовательно, число благоприятствующих этому событию исходов m=8

3. По формуле классической вероятности **P(A) = находим P(A)=8/25**

Ответ: P(A)=8/25

2.Числовые характеристики случайных величин

1. **Случайной величиной** называется числовая переменная величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определёнными вероятностями.
2. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется число, равное сумме произведений всех значений случайной величины на вероятности этих значений M(x) = $x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$ **(1)**
3. **Дисперсией** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания: D(x) = M(x – M(x))^2 **(2)** или или D(x) = M(x^2) – (M(x))^2 **(3)**
4. Дисперсия случайной величины характеризует степень разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называется квадратный корень из дисперсии: (x) = D(x) **(4)**

Пример1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение. Случайная величина X числа очков принимает значения1, 2, 3, 4,5, 6. Составим закон ее распределения:

Xi	1	2	3	4	5	6
Pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда математическое ожидание вычисляется по формуле (1):

Закон распределения случайной величины x^2

Xi	1	4	9	16	25	36
Pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда M(x^2)=1/6(1+4+9+16+25+36)=1/6·91=91/6

По формуле (3) найдем дисперсию: D(x) = M(x^2) – (M(x))^2=91/6-(7/2)^2=35/12=2,92

По формуле (4) вычислим среднее квадратичное отклонение

(x) = D(x)=√2, 92≈1,71

Ответ: M(x)=3,5; D(x)=2,92; (x) =1,71.

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1:

1. Какова вероятность того, что число на вырванном наудачу листке нового календаря равно 30, если в году 365 дней?

2. Для заданного закона распределения найти M(x), D(x), (x).

x_i	0	3	5	8
p_i	0.3	0.25	0.3	0.15

Вариант 2:

1. В урне 20 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 5 красных и 15 синих. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется красным?

2. Для заданного закона распределения найти M(x), D(x), (x).

x_i	0	3	5	8
p_i	0.3	0.25	0.3	0.15

3. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ:

Основные источники:

Интернет – ресурсы:

ЭБС «Университетская библиотека online».