Методические указания
по УП.02.01 Учебная практика

Специальность

09.02.07 Информационные системы и программирование

2023

Методические указания по УП.02.01 разработаны с учетом ФГОС среднего профессионального образования специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): преподаватель колледжа

Рассмотрены Учебно- методическим советом колледжа

Протокол № от «30» июня 2023 г

Председатель УМС специальности ___________

и утверждены решением Педагогического совета колледжа.

Протокол № от «30» июня 2023 г

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

Практическая работа № 1. Решение задачи линейного программирования симплекс-методом.

Цель работы: научиться решать задачу линейного программирования симплекс-методом

Содержание работы:

1. Основные понятия.

Симплекс-метод позволяет эффективно найти оптимальное решение, избегая простой перебор всех возможных угловых точек. Основной принцип метода: вычисления начинаются с какого-то «стартового» базисного решения, а затем ведется поиск решений, «улучшающих» значение целевой функции. Это возможно только в том случае, если возрастание какой-то переменной приведет к увеличению значения функционала.

Необходимые условия для применения симплекс-метода:

1. Задача должна иметь каноническую форму.
2. У задачи должен быть явно выделенный базис.

Определение: Явно выделенным базисом будем называть вектора вида:$(..0100..)^T$,$(..010..)^T$,$(..0010..)^T$..., т.е. только одна координата вектора ненулевая и равна 1.

Замечание: Базисный вектор имеет размерность (m x1), где m – количество уравнений в системе ограничений.

Для удобства вычислений и наглядности обычно пользуются симплекс-таблицами:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	…	x_n
x_n	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
x_{n-1}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
x_{n-m+1}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
F	0	c_1	c_2	…	c_n

- В первой строке указывают «наименование» всех переменных.
- В первом столбце указывают номера базисных переменных, во последней ячейке – букву F (это строка функции).
- В «середине таблицы» указывают коэффициенты матрицы ограничений — $a_{ij.}$
- Второй столбец – вектор правых частей соответствующих уравнений системы ограничений.
- Вторая нижняя ячейка – значение целевой функции. На первой итерации ее полагают равной 0.

Замечание: Базис – переменные, коэффициенты в матрице ограничений при которых образуют базисные вектора.

Замечание: Если ограничения в исходной задаче представлены неравенствами вида $\leq$, то при приведении задачи к канонической форме, введенные дополнительные переменные образуют начальное базисное решение.

Замечание: Коэффициенты в строке функции берутся со знаком «-».

2. Алгоритм симплекс-метода:

1. Выбираем переменную, которую будем вводить в базис. Это делается в соответствии с указанным ранее принципом: мы должны выбрать переменную, возрастание которой приведет к росту функционала. Выбор происходит по следующему правилу:
   - Если задача на минимум – выбираем максимальный положительный элемент в последней строке.
   - Если задача на максимум – выбираем минимальный отрицательный.

Такой выбор, действительно, соответствует упомянутому выше принципу: если задача на минимум, то чем большее число вычитаем – тем быстрее убывает функционал; для максимума наоборот – чем большее число добавляем, тем быстрее функционал растет.

Замечание: Хотя мы и берем минимальное отрицательное число в задаче на максимум, этот коэффициент показывает направление роста функционала, т.к. строка функционала в симплекс-таблице взята со знаком «–». Аналогичная ситуация с минимизацией.

Определение: Столбец симплекс-таблицы, отвечающий выбранному коэффициенту, называется **ведущим столбцом.**

2. Выбираем переменную, которую будем вводить в базис. Для этого нужно определить, какая из базисных переменных быстрее всего обратится в нуль при росте новой базисной переменной. Алгебраически это делается так:
   - Вектор правых частей почленно делится на ведущий столбец
   - Среди полученных значений выбирают минимальное положительное (отрицательные и нулевые ответы не рассматривают)

Определение: Такая строка называется **ведущей строкой** и отвечает переменной, которую нужно вывести из базиса.

Замечание: Фактически, мы выражаем старые базисные переменные из каждого уравнения системы ограничений через остальные переменные и смотрим, в каком уравнении возрастание новой базисной переменной быстрее всего даст 0. Попадание в такую ситуацию означает, что мы «наткнулись» на новую вершину. Именно поэтому нулевые и отрицательные элементы не рассматриваются, т.к. получение такого результата означает, что выбор такой новой базисной переменной будет уводить нас из области, вне которой решений не существует.

3. Ищем элемент, стоящий на пересечении ведущих строки и столбца.

Определение: Такой элемент называется **ведущим элементом**.

4. Вместо исключаемой переменной в первом столбце (с названиями базисных переменных) записываем название переменной, которую мы вводим в базис.
5. Далее начинается процесс вычисления нового базисного решения. Он происходит с помощью метода Жордана-Гаусса.
   - Новая Ведущая строка = Старая ведущая строка / Ведущий элемент
   - Новая строка = Новая строка – Коэффициент строки в ведущем столбце * Новая Ведущая строка

Замечание: Преобразование такого вида направлено на введение выбранной переменной в базис, т.е. представление ведущего столбца в виде базисного вектора. 6. После этого проверяем условие оптимальности. Если полученное решение неоптимально – повторяем весь процесс снова.

Пример 3.1 Решить ЗЛП симплексным методом.
FX=-2x1+x5⟶min
при условии

Решить задачу линейного программирования симплексным методом

$$f(X) = -2x_1 + x_5 \to \min,$$

при условии

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_5 = 2, \\ -3x_1 + x_4 + 5x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \text{при } i = \overline{1, 5}.$$

Решение. Запишем систему ограничений задачи в векторной форме:

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 + \vec{A}_5 x_5 = \vec{B},$$

Решение. Запишем систему ограничений задачи в векторной форме:
A⇀1x1+A⇀2x2+A⇀3x3+A⇀4x4+A⇀5x5=B⇀
где A⇀1=2 -3 2 , A⇀2=0 0 1 , A⇀3=1 0 0 , A⇀4=0 1 0 , A⇀5=3 5 4 , B⇀=2 3 6 ,

Так как векторы A⇀1, A⇀3,A⇀4 являются единичными линейно независимыми векторами, то выберем их в качестве базисных, а соответствующие переменные x2,x3, x4 будут базисными переменными. Оставшиеся переменные x1, x5 -свободные.

Чтобы найти опорное решение задачи, выразим базисные переменные через свободные, используя систему ограничений:

{x3=2-2x1-3x5 x4=3+3x1-5x5 x2=6-2x1-4x5

Найдем опорное решение, положив все свободные переменные равными 0.

x1=0, x2=6,x3=2, x4=3, x5=0

Хопор=(0;6;2;3;0)

Составим симплекс-таблицу, в первом столбце которой записаны базисные переменные, во втором коэффициенты вектора B⇀, а в последующих – коэффициенты соответствующих векторов для каждой переменной.

Таблица 3.1

Составим симплекс-таблицу, в первом столбце которой записаны базисные переменные, во втором – коэффициенты вектора $\vec{B}$, а в последующих - коэффициенты соответствующих векторов для каждой переменной (табл. 1).

Таблица 1

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	2	2	0	1	0	3	2 : 2 = 1
x_4	3	–3	0	0	1	5	
x_2	6	2	1	0	0	4	6 : 2 = 3
$f(X)$	0	2	0	0	0	–1	

В последней строке симплекс-таблицы записана целевая функция *f*(*X*), ее значение можно вычислить при подстановке опорного решения:

f(Xопор)=-2·0+0=0,

И коэффициенты перед переменными в целевой функции, взятые с противоположными знаками.

Выясняем, имеются ли в последней строке симплекс-таблицы положительные числа; при этом первое число (в данном случае 0) не принимаем во внимание. Обнаруживаем, что такие числа есть – это 2 для x1.

Просматриваем весь столбец x1кроме найденного числа 2, чтобы выяснить, имеются ли в нем положительные элементы. Обнаруживаем, что таких элементов 2. Делим на них соответствующие свободные члены, получаем два отношения:

2:2=1;6:2=3,

из которых наименьшее есть 1. Следовательно, разрешающим элементом является число 2, стоящее на пересечении столбца для x1 и строки для x3.

Новый базис будет состоять из переменных x1,x2, x4 (удаляем из старого базиса x3 и вводим x1). (табл. 3.2) Делим числа, стоящие в строке для x3 таблицы на два, чтобы на месте разрешающего элемента появилась единица, и полученную таким образом строку пишем на месте прежней. К Каждой из остальных строк добавляем вновь полученную строку, умноженную на такое число, чтобы в клетках столбца x1 появились нули, и пишем преобразованные строки на месте прежних (см. табл. 3.2).

В последней строке таблицы 2 нет положительных элементов (первое число – 2 во внимание не принимаем, хотя оно отрицательное). Это свидетельствует о том, что найдено оптимальное решение:x1=1, x2=4,x3=0, x4=6, x5=0
X*=(1;4;0;6;0)

Таблица 3.2

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	1	0	0,5	0	1,5	2 : 2 = 1
x_4	6	0	0	1,5	1	9,5	
x_2	4	0	1	–1	0	1	6 : 2 = 3
$f(X)$	–2	0	0	–1	0	–4	

Соответствующее минимальное значение целевой функции f(X*) =-2

3. Варианты заданий практической работы № 3.

Задание 1. С помощью симплекс-метода найти минимальное значение целевой функции $f(X)$ с учетом приведенной системы ограничений. Записать оптимальное решение задачи.

№ вар	Задача	№ вар	Задача
1	$f(X) = -3x_1 + 8x_5 \to \min$ при условии $\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 = 2 \\ -3x_1 + x_4 + 8x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_5 = 7 \end{cases}$ $x_i \geq 0$, при $i = \overline{1,5}$.	2	$f(X) = -2x_4 + 3x_5 \to \min$ при условии $\begin{cases} x_2 + 5x_4 + 7x_5 = 20 \\ x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 12 \\ x_1 - 2x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$ $x_i \geq 0$, при $i = \overline{1,5}$.
3	$f(X) = -5x_1 + 15x_5 \to \min$ при условии $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 12x_5 = 9 \\ -2x_1 + x_3 + 7x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_4 - 14x_5 = 12 \end{cases}$ $x_i \geq 0$, при $i = \overline{1,5}$.	4	$f(X) = -3x_1 + 16x_3 \to \min$ при условии $\begin{cases} 2x_1 - 10x_3 + x_4 = 8 \\ -4x_1 + x_2 + 8x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_3 + x_5 = 18 \end{cases}$ $x_i \geq 0$, при $i = \overline{1,5}$.
5	$f(X) = 5x_2 - 3x_5 \to \min$ при условии $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 2x_5 = 12 \\ -4x_2 + x_3 + 2x_5 = 8 \\ -3x_2 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$ $x_i \geq 0$, при $i = \overline{1,5}$.	6	$f(X) = -x_1 + 3x_2 \to \min$ при условии $\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 + x_3 = 16 \\ -4x_1 - 5x_2 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 14x_2 + x_5 = 13 \end{cases}$ $x_i \geq 0$, при $i = \overline{1,5}$.
7	$f(X) = -3x_2 + 2x_4 \to \min$ при условии $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 18 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$ $x_i \geq 0$, при $i = \overline{1,5}$.	8	$f(X) = -2x_4 + 3x_5 \to min$ при условии $\begin{cases} x_2 + 5x_4 - 12x_5 = 20 \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$ $x_i \geq 0$, при $i = \overline{1,5}$.

9

$$f(X) = -4x_3 + 2x_4 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 14 \\ -2x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

10

$$f(X) = -3x_1 + 6x_3 \to min$$

при условии

$$\begin{cases} 3x_1 - 15x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_1 + x_2 + 8x_3 = 2 \\ 2x_1 - 12x_3 + x_5 = 18 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

11

$$f(X) = -2x_1 + x_5 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} -4x_1 + x_3 + 3x_5 = 2 \\ -3x_1 + x_4 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_5 = 6 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$

12

$$f(X) = 5x_2 - 4x_3 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 16x_2 + 5x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

13

$$f(X) = -2x_1 + x_5 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} -4x_1 + x_3 + 3x_5 = 2 \\ -3x_1 + x_4 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_5 = 6 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$

14

$$f(X) = 4x_1 - 3x_4 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 5x_4 = 25 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_4 + x_5 = 35 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

15

$$f(X) = -5x_1 + 22x_5 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8x_5 = 6 \\ -2x_1 + x_3 + 9x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_4 - 7x_5 = 15 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

16

$$f(X) = 2x_3 - x_5 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} x_2 - 7x_3 - 6x_5 = 4 \\ 10x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \\ x_1 + 24x_3 + 8x_5 = 16 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

17

$$f(X) = -3x_1 + 4x_5 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 - 8x_5 = 8 \\ -3x_1 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_5 = 7 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

18

$$f(X) = 3x_4 - x_5 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} x_2 - 5x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_1 + 8x_4 + 2x_5 = 10 \\ x_3 + 9x_4 + 4x_5 = 28 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

19

$$f(X) = -2x_2 + 2x_4 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 12x_4 = 12 \\ 2x_2 + 13x_4 + x_5 = 16 \\ -4x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

20

$$f(X) = -3x_2 + 2x_3 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} 5x_2 - 15x_3 + x_5 = 15 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 10 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

21

$$f(X) = -3x_2 + 2x_3 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} 4x_2 + 12x_3 + x_5 = 12 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

22

$$f(X) = -3x_1 + 6x_2 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + x_5 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

23

$$f(X) = 3x_1 - 2x_4 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 12x_1 + x_2 + 4x_4 = 8 \\ 13x_1 + 5x_4 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

24

$$f(X) = 8x_1 - x_4 \to \min$$

при условии

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_4 = 16 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, при $i = \overline{1, 5}$.

Практическая работа № 6. Нахождение опорного плана перевозок методом северо-западного угла и методом минимального элемента.

Цель работы: научиться составлять начальный опорный план перевозок для дальнейшей оптимизации.

1. **Основные понятия.** Рассмотрим следующую задачу, называемую транспортной задачей. Имеется m поставщиков A_1, A_2,... A_m, у которых сосредоточены запасы одного и того же груза в количестве a_1, a_2,... a_m единиц, соответственно.

Этот груз нужно доставить n потребителям B_1, B_2,... B_n, заказавшим b_1, b_2,...b_m единиц этого груза, соответственно. Известны также все тарифы перевозок груза c_{ij} (стоимость перевозок единицы груза) от поставщика A_i к потребителю B_j. Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок была бы минимальной.

Обозначим суммарный запас груза у всех поставщиков символом a , а суммарную потребность в грузе у всех потребителей – символом b .

Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i \,, \quad b = \sum_{j=1}^{n} b_j \,.$$

Транспортная задача называется закрытой, если $a = b$. Если же $a\ b$, то транспортная задача называется открытой.

Пусть x_{ij} (x_{ij} 0) – количество груза, отправляемого поставщиком A_i потребителю B_j . Тогда суммарные затраты F на перевозки будут вычисляться по формуле

F(X)=i=1mj=1ncijxij

Матрица X с неотрицательными элементами x_{ij} называется планом перевозок.

Функция $F(X)$ называется целевой функцией.

Математическая формулировка транспортной задачи заключается в нахождении плана перевозок $X=\{x_{ij}\}$, который удовлетворяет системе ограничений

{j=1nxij=ai, i=1,2,...m i=1mxij=bj, j=1,2,...n

и доставляет минимум целевой функции $F(X)$.

План перевозок, реализующий минимум целевой функции $F(X)$, называется оптимальным.

Смысл первой группы равенств в системе ограничений состоит в том, что суммарное количество груза, отправленное всем потребителям каждым поставщиком, равно запасу груза у этого поставщика. Вторая группа равенств в системе ограничений показывает, что суммарное количество груза, полученное каждым потребителем от всех поставщиков, равно заказу этого потребителя.

2. **Составление первоначального плана перевозок с помощью метода северо-западного угла.**

Составить транспортную таблицу и найти оптимальный план перевозок методом северо-западного угла, если исходные данные транспортной задачи представлены с помощью матриц:

Составить транспортную таблицу и найти оптимальный план перевозок методом потенциалов, если исходные данные транспортной задачи представлены с помощью матриц:

$$A=\begin{pmatrix}200\\300\\500\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}200\\200\\300\\300\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\2&3&5&6\\6&7&9&12\end{pmatrix},$$

где **А** – матрица запасов у поставщиков;

В – матрица запросов потребителей;

С – матрица тарифов на перевозку грузов.

Решение: Проверим выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости транспортной задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и суммарные запросы потребителей:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200+300+500=1000. \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 200+200+300+300=1000.$$

Задача имеет решение, так как выполнено условие:

где A – матрица запасов у поставщиков, B – матрица запросов у потребителей, C – матрица тарифов на перевозку грузов.

Решение: Проверим выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости транспортной задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и суммарные запасы потребителей:

Задача имеет решение, так как выполнено условие:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j .$$

Такая задача называется сбалансированной, а ее модель – закрытой.

Используя исходные данные, составим транспортную таблицу (табл. 3).

Такая задача называется сбалансированной, а ее модель – закрытой. Используя исходные данные, составим транспортную таблицу (табл. 6.1)

Таблица 6.1

Таблица 3

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	**4**	**3**	**2**	**1**	200
A_2	**2**	**3**	**5**	**6**	300
A_3	**6**	**7**	**9**	**12**	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

Найдем начальное опорное решение задачи методом наименьшей стоимости (при составлении опорного решения можно также использовать метод северо-западного угла). Результаты построения опорного решения приведены в табл. 4.

Найдем начальное опорное решение методом северо-западного угла

Начнем заполнение таблицы с верхнего левого угла, ячейки (1,1). Потребность первого потребителя 200 ед., запасы у первого производителя - 200.

Следовательно, в ячейку (1,1) можно поставить *min* (200,200)=200, при этом запасы первого производителя становятся равны 0, потребности первого потребителя удовлетворены, значит в первый столбец и в первую строку больше ничего не ставим.

Продолжим заполнять матрицу в ячейке (2,2). Запасы у второго потребителя равны 300, а потребности второго магазина 200. Следовательно, x_{22} =*min* (200,300) = 200, и мы закрываем потребности второго потребителя полностью, а у второго производителя остается еще 100 ед. товара. Эти 100 единиц передаем третьему потребителю (ячейка (3,2)), при этом у второго производителя заканчиваются запасы на складе, значит во второй строке больше ничего не ставим, но потребности третьего потребителя еще не удовлетворены, ему необходимо еще 200 ед. товара. Их перевозим от третьего производителя (ячейка (3,3)). При этом потребности третьего потребителя удовлетворены, а у третьего производителя еще осталось в запасе 300 ед. товара. Их перевозим четвертому потребителю.

Результаты построения опорного решения приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2.

Поставщики	Потребители				
	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	4 200	3	2	1	200
A_2	2	3 200	5 100	6	300
A_3	6	7	9 200	12 300	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

При построении опорного плана в каждой ячейке, кроме последней, должно происходить только одно из двух событий: либо удовлетворяться потребности одного из потребителей, либо заканчиваться запасы у одного из поставщиков. Если одновременно в одной ячейке исчерпаны запасы одного производителя и удовлетворены потребности одного потребителя, то такая ситуация приведет к получению вырожденного опорного плана.

Опорный план называется **вырожденным**, если количество базисных клеток (отличных от нуля) меньше, чем $n+m-1$, где n - количество потребителей, m - количество производителей.

Для нашей задачи n+m-1=4+3-1=6. Следовательно, базисных клеток должно быть 6, у нас их получилось 5. Для получения невырожденного опорного плана необходимо добавить в одну ячейку 0, Эта ячейка должна находиться рядом с той, в которой произошло совмещение двух событий. Значит 0 нужно поставить либо в ячейку (1,2), либо в ячейку (2,1).

Таблица 6.3.

Поставщики	Потребители				
	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	4 200	3 0	2	1	200
A_2	2	3 200	5 100	6	300
A_3	6	7	9 200	12 300	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

Вычислим значение целевой функции при этом опорном решении:

FX=200·4+0·3+200·3+100·5+200·9+300·12=800+600+500+1800 +3600=7300

3. Составление первоначального плана перевозок с помощью метода минимального элемента (минимальной стоимости)

Решение: построение плана начнем с клетки с наименьшим тарифом перевозок. При наличии нескольких клеток с одинаковым тарифом, выберем любую из них. Пусть это будет клетка (i, j). Запишем в эту клетку элемент $x_{ij}=min\{a_i, b_j\}$. Если $a_i<b_j$, то запасы поставщика A_i исчерпаны, а потребителю B_j требуется еще $b_j- a_i$ единиц груза. Поэтому, не принимаю более во внимание i-ю строку, снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей. В случае $a_i> b_j$ из рассмотрения исключается j-й столбец, а запасы A_i полагаются равными $a_i - b_j$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

В нашей задаче минимальный тариф c_{14} =1, поэтому заполнение таблицы начнем с ячейки (1,1). $min\{200,300\}$=200, следовательно x_{14}=200, у производителя A_1 больше запасов нет, у четвертого потребителя остались потребности 100 ед. товара.

Следующие по величине тарифы $c_{13}=c_{21}$=2. Но в ячейку (1,3) мы уже ничего поставить не можем, так как запасы первого производителя исчерпаны, следовательно дальше заполняем ячейку (2,1). $x_{21}=min(200,300)$=200. У второго производителя осталось запасов 100, потребности первого потребителя удовлетворены.

Дальше заполняем ячейки с тарифами c_{22}=3. $x_{22}=min(100,200)$=100. при этом запасы у второго производителя закончились, а потребности второго потребителя остались равными 100 ед. товара.

Из оставшихся ячеек минимальный тариф c_{32}=7. $x_{32}=min(100,500)$=100.

У третьего производителя запасы остались равными 400 ед. товара, потребности второго потребителя удовлетворены.

Из оставшихся ячеек минимальный тариф c_{33}=9. $x_{33}=min(300,400)$=300.

Потребности третьего потребителя удовлетворены. У третьего производителя запасы равны 100. Отправляем их четвертому потребителю.

Матрица грузоперевозок представлена в таблице 3.

Таблица 6.4

Поставщики	Потребители	

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	4	3	2	1 200	200
A_2	2 200	3 100	5	6	300
A_3	6	7 100	9 300	12 100	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

Вычислим значение целевой функции при этом опорном решении:
FX=200·1+200·2+100·3+100·7+300·9+100·12=
=200+400+300+700 +2700+1200=5500

4. Варианты заданий практической работы № 6.

Задача 1. Составить транспортную таблицу и найти оптимальный план перевозок методом северо-западного угла

Задача 2. Составить транспортную таблицу и найти оптимальный план перевозок методом минимального элемента

Исходные данные транспортной задачи представлены с помощью матриц:

A – матрица запасов у поставщиков,

B – матрица запросов у потребителей,

C – матрица тарифов на перевозку грузов.

№ ва	Исходные данные	**№ вар**	Исходные данные
1.	$A=\begin{pmatrix}250\\100\\150\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}120\\200\\80\\100\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&4&5&3\\7&2&8&9\\3&1&3&2\end{pmatrix}.$	**2.**	$A=\begin{pmatrix}450\\150\\200\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}100\\350\\100\\250\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&4&9&7\\12&8&2&4\\2&9&6&5\end{pmatrix}.$
3.	$A=\begin{pmatrix}100\\300\\600\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}350\\100\\150\\400\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&6&7&3\\8&12&5&2\\4&5&9&6\end{pmatrix}.$	**4.**	$A=\begin{pmatrix}250\\100\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\120\\180\\300\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&1&8&2\\9&2&7&11\\6&8&4&3\end{pmatrix}.$
5.	$A=\begin{pmatrix}400\\100\\500\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\100\\400\\350\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}7&2&5&8\\1&5&3&9\\3&6&12&2\end{pmatrix}.$	**6.**	$A=\begin{pmatrix}500\\100\\300\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}300\\200\\200\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&5&7&1\\1&6&3&2\\4&13&2&8\end{pmatrix}.$
7.	$A=\begin{pmatrix}300\\200\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\250\\300\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}7&2&5&8\\2&5&3&9\\3&6&10&2\end{pmatrix}.$	**8.**	$A=\begin{pmatrix}550\\100\\250\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}170\\200\\320\\210\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&2&4&1\\7&8&2&3\\8&5&3&4\end{pmatrix}$
9.	$A=\begin{pmatrix}300\\200\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}200\\150\\200\\350\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&6&7&3\\8&10&5&2\\4&5&9&6\end{pmatrix}.$	**10.**	$A=\begin{pmatrix}500\\100\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}200\\350\\250\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&5&8&9\\7&3&2&5\\3&12&4&6\end{pmatrix}.$

11.

$$A=\begin{pmatrix}150\\150\\500\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}100\\250\\350\\100\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4&8&5&8\\5&9&3&2\\10&2&1&7\end{pmatrix}.$$

12.

$$A=\begin{pmatrix}300\\200\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}300\\100\\200\\300\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&6&12&5\\4&2&7&1\\1&3&2&3\end{pmatrix}$$

13.

$$A=\begin{pmatrix}100\\650\\450\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}400\\200\\100\\500\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}8&1&3&5\\9&2&4&12\\5&7&1&8\end{pmatrix}.$$

14.

$$A=\begin{pmatrix}200\\400\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\250\\300\\300\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}12&9&2&7\\5&4&6&9\\2&8&9&3\end{pmatrix}.$$

15.

$$A=\begin{pmatrix}300\\400\\600\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}300\\250\\550\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&9&5&2\\2&4&3&9\\7&12&8&6\end{pmatrix}.$$

16.

$$A=\begin{pmatrix}300\\400\\600\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}300\\250\\550\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&9&5&2\\2&4&3&9\\7&12&8&6\end{pmatrix}.$$

17.

$$A=\begin{pmatrix}320\\280\\450\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}250\\300\\250\\250\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}8&1&4&2\\3&5&4&6\\5&4&8&9\end{pmatrix}.$$

18.

$$A=\begin{pmatrix}500\\300\\200\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\250\\250\\350\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}10&3&2&5\\8&6&9&3\\4&2&5&6\end{pmatrix}.$$

19.

$$A=\begin{pmatrix}200\\500\\300\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}250\\300\\350\\100\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}13&7&8&5\\2&3&5&4\\9&4&8&1\end{pmatrix}.$$

20.

$$A=\begin{pmatrix}260\\340\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}100\\200\\250\\450\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&1&9&4\\6&3&7&8\\8&2&10&1\end{pmatrix}$$

21.

$$A=\begin{pmatrix}300\\300\\200\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}250\\100\\250\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4&8&5&8\\5&9&3&2\\11&2&1&7\end{pmatrix}.$$

22.

$$A=\begin{pmatrix}450\\150\\200\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}200\\100\\100\\400\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}6&4&2&1\\11&8&7&4\\7&1&8&5\end{pmatrix}$$

23.

$$A=\begin{pmatrix}200\\250\\250\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}200\\100\\100\\300\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&5&1&2\\1&2&7&3\\6&5&8&10\end{pmatrix}.$$

24.

$$A=\begin{pmatrix}300\\300\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}100\\250\\450\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&5&8&9\\7&3&2&5\\3&10&4&6\end{pmatrix}$$

Практическая работа № 2. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Цель работы: изучить метод потенциалов оптимизации начального опорного плана перевозок и применять его для нахождения оптимального плана.

Содержание работы:

1. **Метод потенциалов оптимизации начального опорного плана перевозок.**

Дана транспортная задача, исходные данные которой представлены матрицами А - запасов у поставщиков, В- потребностей у потребителей и С- тарифов на перевозки.

Составить транспортную таблицу и найти оптимальный план перевозок методом потенциалов, если исходные данные транспортной задачи представлены с помощью матриц:

$$A=\begin{pmatrix}200\\300\\500\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}200\\200\\300\\300\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\2&3&5&6\\6&7&9&12\end{pmatrix},$$

где А – матрица запасов у поставщиков;

В – матрица запросов потребителей;

С – матрица тарифов на перевозку грузов.

Решение: Проверим выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости транспортной задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и суммарные запросы потребителей:

$$\sum_{i=1}^{3}a_i=200+300+500=1000.\qquad \sum_{j=1}^{4}b_j=200+200+300+300=1000.$$

Задача имеет решение, так как выполнено условие:

Составить опорный план перевозок и оптимизировать его с помощью метода потенциалов.

Решение:

Используя исходные данные, составим транспортную таблицу.

Таблица 7.1

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	**4**	**3**	**2**	**1**	200
A_2	**2**	**3**	**5**	**6**	300
A_3	**6**	**7**	**9**	**12**	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

Найдем начальное опорное решение задачи методом наименьшей стоимости (при составлении опорного решения можно также использовать метод северо-западного угла). Результаты построения опорного решения приведены в табл. 7.2

Таблица 7.2

Таблица 4

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	**4**	**3**	**2**	**1** 200	200
A_2	**2** 200	**3** 100	**5**	**6**	300
A_3	**6**	**7** 100	**9** 300	**12** 100	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

Вычислим значение целевой функции при этом опорном решении:

$$F(X) = 200 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 7 + 300 \cdot 9 + 100 \cdot 12 = 5500.$$

Для проверки оптимальности найденного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке транспортной таблицы сумма потенциалов равна стоимости на перевозку (тарифу):

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0.$$

Запишем систему уравнений для нахождения потенциалов и решим ее:

Вычислим значение целевой функции при этом опорном решении:

$$FX=200\cdot1+200\cdot2+100\cdot3+100\cdot7+300\cdot9+100\cdot12=5500$$

Для проверки оптимальности найденного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке транспортной таблицы сумма потенциалов должна быть равна стоимости перевозки (тарифу)

Таблица 4

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	**4**	**3**	**2**	**1** 200	200
A_2	**2** 200	**3** 100	**5**	**6**	300
A_3	**6**	**7** 100	**9** 300	**12** 100	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

Вычислим значение целевой функции при этом опорном решении:

$$F(X)=200\cdot 1+200\cdot 2+100\cdot 3+100\cdot 7+300\cdot 9+100\cdot 12=5500.$$

Для проверки оптимальности найденного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке транспортной таблицы сумма потенциалов равна стоимости на перевозку (тарифу):

$$\alpha_i+\beta_j=c_{ij} \text{ при } x_{ij}>0.$$

Запишем систему уравнений для нахождения потенциалов и решим ее:

Запишем систему уравнений для нахождения потенциалов и решим ее:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_4=1, \\ \alpha_2+\beta_1=2, \\ \alpha_2+\beta_2=3, \\ \alpha_3+\beta_2=7, \\ \alpha_3+\beta_3=9, \\ \alpha_3+\beta_4=12. \end{cases}$$

Система состоит из шести уравнений и имеет семь переменных, поэтому система является неопределенной. Одному из потенциалов задаем значение произвольно: пусть $\alpha_1=0$. Остальные потенциалы находятся однозначно:

$$\begin{aligned} \beta_4&=1-\alpha_1=1-0=1, \\ \alpha_3&=12-\beta_4=12-1=11, \\ \beta_3&=9-\alpha_3=9-11=-2, \\ \beta_2&=7-\alpha_3=7-11=-4, \\ \alpha_2&=3-\beta_2=3+4=7, \\ \beta_1&=2-\alpha_2=2-7=-5. \end{aligned}$$

Найдем косвенные тарифы для всех незаполненных клеток транспортной таблицы:

Система состоит из шести уравнений и имеет семь переменных, поэтому система является неопределенной. Одному из потенциалов задаем значение произвольно: пусть 1=0. Остальные потенциалы находятся однозначно.

$$\beta_4 = 1 - \alpha_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$\alpha_3 = 12 - \beta_4 = 12 - 1 = 11,$$
$$\beta_3 = 9 - \alpha_3 = 9 - 11 = -2,$$
$$\beta_2 = 7 - \alpha_3 = 7 - 11 = -4,$$
$$\alpha_2 = 3 - \beta_2 = 3 + 4 = 7,$$
$$\beta_1 = 2 - \alpha_2 = 2 - 7 = -5.$$

Найдем косвенные тарифы для всех незаполненных клеток транспортной таблицы.

$$c_{11}^* = \alpha_1 + \beta_1 = 0 + (-5) = -5,$$
$$c_{12}^* = \alpha_1 + \beta_2 = 0 + (-4) = -4,$$
$$c_{13}^* = \alpha_1 + \beta_3 = 0 + (-2) = -2,$$
$$c_{23}^* = \alpha_2 + \beta_3 = 7 + (-2) = 5,$$
$$c_{24}^* = \alpha_2 + \beta_4 = 7 + 1 = 8,$$
$$c_{31}^* = \alpha_3 + \beta_1 = 11 + (-5) = 6.$$

Проверим опорное решение на оптимальность. Для этого вычислим значения критерия оптимальности δ_{ij} для каждой незаполненной клетки (для всех занятых клеток $\delta_{ij} = 0$).

$$c_{11}^* = \alpha_1 + \beta_1 = 0 + (-5) = -5,$$
$$c_{12}^* = \alpha_1 + \beta_2 = 0 + (-4) = -4,$$
$$c_{13}^* = \alpha_1 + \beta_3 = 0 + (-2) = -2,$$
$$c_{23}^* = \alpha_2 + \beta_3 = 7 + (-2) = 5,$$
$$c_{24}^* = \alpha_2 + \beta_4 = 7 + 1 = 8,$$
$$c_{31}^* = \alpha_3 + \beta_1 = 11 + (-5) = 6.$$

Проверим опорное решение на оптимальность. Для этого вычислим значения критерия оптимальности δ_{ij} для каждой незаполненной клетки (для всех занятых клеток $\delta_{ij} = 0$).

Проверим опорное решение на оптимальность. Для этого вычислим значения критерия оптимальности ij для каждой незаполненной клетки (для всех занятых клеток ij=0).

$$\delta_{11} = c_{11}^{*} - c_{11} = -5 - 4 = -9,$$

$$\delta_{12} = c_{12}^{*} - c_{12} = -4 - 3 = -7,$$

$$\delta_{13} = c_{13}^{*} - c_{13} = -2 - 2 = -4,$$

$$\delta_{23} = c_{23}^{*} - c_{23} = 5 - 5 = 0,$$

$$\delta_{24} = c_{24}^{*} - c_{24} = 8 - 6 = 2,$$

$$\delta_{31} = c_{31}^{*} - c_{31} = 6 - 6 = 0.$$

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как имеется положительное значение критерия оптимальности $\delta_{24} = 2 > 0$.

Перейдем к новому опорному решению. Для клетки (2, 4) с положительным значением критерия оптимальности строим цикл. Ставим в эту клетку знак «+», присоединяем ее к занятым клеткам и, вычеркивая строки и столбцы транспортной таблицы, в которых содержится лишь одна перевозка, найдем цикл (2, 4), (3, 4), (3, 2), (2, 2). В угловых точках цикла расставим поочередно знаки «+» и «–», начиная со знака «+» в клетке (2, 4). Цикл изображен в табл. 5.

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как имеется положительное значение критерия оптимальности $24=2>0$.

Перейдем к новому опорному решению. Для клетки (2,4) с положительным значением критерия оптимальности строим цикл. Ставим в эту клетку знак «+», присоединяем ее к занятым клеткам и, вычеркивая строки и столбцы транспортной таблицы, в которых содержится лишь одна перевозка, найдем цикл (2, 4), (3, 4), (3, 2), (2, 2). В угловых точках цикла расставим поочереди знаки «+» и «-», начиная со знака «+» в клетка (2, 4). Цикл изображен в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	4	3	2	1 200	200
A_2	2 200	– 3 100	5	+ 6	300
A_3	6	+ 7 100	9 300	– 12 100	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

В клетки, отмеченные знаком «+» добавляется груз, а из клеток, отмеченных знаком «-», убавляется такой же по величине груз. Определим величину груза, перераспределяемому по циклу. Она равна значению наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «-»: $\theta=\{100, 100) =100$. Осуществив сдвиг по циклу на величину $\theta=100$,
получим опорное решение: табл. 7.4

Таблица 7.4

$\theta = \min\{100, 100\} = 100$. Осуществив сдвиг по циклу на величину $\theta = 100$, получим второе опорное решение (табл. 6).

Таблица 6

Поставщики \ Потребители	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	**4**	**3**	**2**	**1** 200	200
A_2	**2** 200	**3** 0	**5**	**6** 100	300
A_3	**6**	**7** 200	**9** 300	**12**	500
Потребность в грузе	200	200	300	300	1000

Если в результате пересчета одновременно несколько ранее занятых клеток принимают нулевые значения, то свободной объявляется лишь одна из них, а остальные считаются условно занятыми с нулевыми поставками.

Найдем для этого решения потенциалы, составив систему уравнений:

Если в результате пересчета одновременно несколько ранее занятых ячеек принимают нулевые значения, то свободной объявляется лишь одна из них, а остальные считаются условно занятыми с нулевыми поставками.

Найдем для этого решения потенциалы, составив систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_4 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 6, \\ \alpha_3 + \beta_2 = 7, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 9. \end{cases}$$

Вычислим значения потенциалов, положив $\alpha_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \beta_4 &= 1 - \alpha_1 = 1 - 0 = 1, \\ \alpha_2 &= 6 - \beta_4 = 6 - 1 = 5, \\ \beta_1 &= 2 - \alpha_2 = 2 - 5 = -3, \\ \beta_2 &= 3 - \alpha_2 = 3 - 5 = -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 7 - \beta_2 = 7 + 2 = 9, \\ \beta_3 &= 9 - \alpha_3 = 9 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Вычислим значения потенциалов, положив 1=0.

$$\begin{aligned} \beta_4 &= 1 - \alpha_1 = 1 - 0 = 1, \\ \alpha_2 &= 6 - \beta_4 = 6 - 1 = 5, \\ \beta_1 &= 2 - \alpha_2 = 2 - 5 = -3, \\ \beta_2 &= 3 - \alpha_2 = 3 - 5 = -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 7 - \beta_2 = 7 + 2 = 9, \\ \beta_3 &= 9 - \alpha_3 = 9 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Найдем косвенные тарифы для всех незаполненных клеток транспортной таблицы.

Найдем косвенные тарифы для всех незаполненных клеток транспортной таблицы:

$$c_{11}^{*} = \alpha_1 + \beta_1 = 0 + (-3) = -3,$$
$$c_{12}^{*} = \alpha_1 + \beta_2 = 0 + (-2) = -2,$$
$$c_{13}^{*} = \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 0 = 0,$$
$$c_{23}^{*} = \alpha_2 + \beta_3 = 5 + 0 = 5,$$
$$c_{31}^{*} = \alpha_3 + \beta_1 = 9 + (-3) = 6,$$
$$c_{34}^{*} = \alpha_3 + \beta_4 = 9 + 1 = 10.$$

Вычислим значения критерия оптимальности ij для каждой незаполненной клетки (для всех занятых клеток ij=0).

Найдем косвенные тарифы для всех незаполненных клеток транспортной таблицы:

$$c_{11}^{*} = \alpha_1 + \beta_1 = 0 + (-3) = -3,$$
$$c_{12}^{*} = \alpha_1 + \beta_2 = 0 + (-2) = -2,$$
$$c_{13}^{*} = \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 0 = 0,$$
$$c_{23}^{*} = \alpha_2 + \beta_3 = 5 + 0 = 5,$$
$$c_{31}^{*} = \alpha_3 + \beta_1 = 9 + (-3) = 6,$$
$$c_{34}^{*} = \alpha_3 + \beta_4 = 9 + 1 = 10.$$

Вычислим значения критерия оптимальности δ_{ij} для каждой незаполненной клетки.

$$\delta_{11} = c_{11}^{*} - c_{11} = -3 - 4 = -7,$$
$$\delta_{12} = c_{12}^{*} - c_{12} = -2 - 3 = 5,$$
$$\delta_{13} = c_{13}^{*} - c_{13} = 0 - 2 = -2,$$
$$\delta_{23} = c_{23}^{*} - c_{23} = 5 - 5 = 0,$$
$$\delta_{31} = c_{31}^{*} - c_{31} = 6 - 6 = 0,$$
$$\delta_{34} = c_{34}^{*} - c_{34} = 10 - 12 = -2.$$

Найдем косвенные тарифы для всех незаполненных клеток транспортной таблицы:

$$c_{11}^* = \alpha_1 + \beta_1 = 0 + (-3) = -3,$$
$$c_{12}^* = \alpha_1 + \beta_2 = 0 + (-2) = -2,$$
$$c_{13}^* = \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 0 = 0,$$
$$c_{23}^* = \alpha_2 + \beta_3 = 5 + 0 = 5,$$
$$c_{31}^* = \alpha_3 + \beta_1 = 9 + (-3) = 6,$$
$$c_{34}^* = \alpha_3 + \beta_4 = 9 + 1 = 10.$$

Вычислим значения критерия оптимальности δ_{ij} для каждой незаполненной клетки.

$$\delta_{11} = c_{11}^* - c_{11} = -3 - 4 = -7,$$
$$\delta_{12} = c_{12}^* - c_{12} = -2 - 3 = 5,$$
$$\delta_{13} = c_{13}^* - c_{13} = 0 - 2 = -2,$$
$$\delta_{23} = c_{23}^* - c_{23} = 5 - 5 = 0,$$
$$\delta_{31} = c_{31}^* - c_{31} = 6 - 6 = 0,$$
$$\delta_{34} = c_{34}^* - c_{34} = 10 - 12 = -2.$$

Все значения неотрицательные, следовательно, найденное решение является оптимальным. Вычислим значение целевой функции для этого решения:

$$FX=200\cdot1+200\cdot2+100\cdot6+200\cdot7+300\cdot9=5300$$

Ответ: $minFX=5300$ при оптимальном плане

Все значения неотрицательные, следовательно, найденное решение является оптимальным. Вычислим значение целевой функции для этого решения:

$$F(X) = 200\cdot1 + 200\cdot2 + 100\cdot6 + 200\cdot7 + 300\cdot9 = 5300.$$

Ответ: $min\,F(X) = 5300$ при оптимальном плане

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варианты заданий практической работы № 7.

$$A = \begin{pmatrix} 250 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 120 \\ 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2

$$A = \begin{pmatrix} 450 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 100 \\ 350 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 & 7 \\ 12 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

3

$$A = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 350 \\ 100 \\ 150 \\ 400 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 3 \\ 8 & 12 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 250 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 150 \\ 120 \\ 180 \\ 300 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 & 2 \\ 9 & 2 & 7 & 11 \\ 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5
$$A=\begin{pmatrix}400\\100\\500\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\100\\400\\350\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}7&2&5&8\\1&5&3&9\\3&6&12&2\end{pmatrix}.$$

6
$$A=\begin{pmatrix}500\\100\\300\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}300\\200\\200\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&5&7&1\\1&6&3&2\\4&13&2&8\end{pmatrix}.$$

7
$$A=\begin{pmatrix}300\\200\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\250\\300\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}7&2&5&8\\2&5&3&9\\3&6&10&2\end{pmatrix}.$$

8
$$A=\begin{pmatrix}550\\100\\250\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}170\\200\\320\\210\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&2&4&1\\7&8&2&3\\8&5&3&4\end{pmatrix}$$

9
$$A=\begin{pmatrix}300\\200\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}200\\150\\200\\350\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&6&7&3\\8&10&5&2\\4&5&9&6\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}500\\100\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}200\\350\\250\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&5&8&9\\7&3&2&5\\3&12&4&6\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}150\\150\\500\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}100\\250\\350\\100\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4&8&5&8\\5&9&3&2\\10&2&1&7\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}300\\200\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}300\\100\\200\\300\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&6&12&5\\4&2&7&1\\1&3&2&3\end{pmatrix}$$

1
$$A=\begin{pmatrix}100\\650\\450\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}400\\200\\100\\500\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}8&1&3&5\\9&2&4&12\\5&7&1&8\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}200\\400\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\250\\300\\300\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}12&9&2&7\\5&4&6&9\\2&8&9&3\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}300\\400\\600\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}300\\250\\550\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&9&5&2\\2&4&3&9\\7&12&8&6\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}300\\400\\600\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}300\\250\\550\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&9&5&2\\2&4&3&9\\7&12&8&6\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}320\\280\\450\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}250\\300\\250\\250\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}8&1&4&2\\3&5&4&6\\5&4&8&9\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}500\\300\\200\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}150\\250\\250\\350\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}10&3&2&5\\8&6&9&3\\4&2&5&6\end{pmatrix}.$$

1
$$A=\begin{pmatrix}200\\500\\300\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}250\\300\\350\\100\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}13&7&8&5\\2&3&5&4\\9&4&8&1\end{pmatrix}.$$

2
$$A=\begin{pmatrix}260\\340\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}100\\200\\250\\450\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&1&9&4\\6&3&7&8\\8&2&10&1\end{pmatrix}.$$

2
$$A=\begin{pmatrix}300\\300\\200\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}250\\100\\250\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4&8&5&8\\5&9&3&2\\11&2&1&7\end{pmatrix}.$$

2
$$A=\begin{pmatrix}450\\150\\200\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}200\\100\\100\\400\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}6&4&2&1\\11&8&7&4\\7&1&8&5\end{pmatrix}.$$

2
$$A=\begin{pmatrix}200\\250\\250\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}200\\100\\100\\300\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&5&1&2\\1&2&7&3\\6&5&8&10\end{pmatrix}.$$

2
$$A=\begin{pmatrix}300\\300\\400\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}100\\250\\450\\200\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&5&8&9\\7&3&2&5\\3&10&4&6\end{pmatrix}.$$

Практическая работа № 3. Задача о назначениях. Алгоритм (модификация «венгерского алгоритма»). Программа «Назначение».

Рассмотрим ситуацию, когда требуется распределить m работ (или исполнителей) по n станкам. Работа i (i = 1, ..., m), выполняемая на станке j (j = 1, ..., n), связана с затратами c_{ij}. Задача состоит в таком распределении работ по станкам (одна работа выполняется на одном станке), которое соответствует минимизации суммарных затрат.

Эту задачу можно рассматривать как частный случай транспортной задачи. Здесь работы представляют «исходные пункты», а станки – «пункты назначения». Предложение в каждом исходном пункте равно 1, т.е. $a_i = 1$ для всех i. Аналогично спрос в каждом пункте назначения равен 1, т.е. $b_j = 1$ для всех j. Стоимость «перевозки» (прикрепления) работы i к станку j равна c_{ij}. Если какую-либо работу нельзя выполнять на некотором станке, то соответствующая стоимость c_{ij} берется равной очень большому числу. Матрица стоимостей C определяется следующим образом:

станки

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & n & a_i \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \dots \\ m \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{array} \\
b_j & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \end{array}
\end{array}$$

виды работ

Прежде чем решать такую задачу, необходимо ликвидировать дисбаланс, добавив фиктивные работы или станки в зависимости от начальных условий. Поэтому без потери общности можно положить $m = n$.

Пусть $x_{ij} = 0$, если j-я работа не выполняется на i-ом станке,

$x_{ij} = 1$, если j-я работа выполняется на i-ом станке.

Таким образом, решение задачи может быть записано в виде двумерного массива $X = (x_{ij})$. Допустимое решение называется назначением. Допустимое решение строится путем выбора одного элемента в каждой строке матрицы $X = (x_{ij})$ и одного элемента в каждом столбце этой матрицы. Для заданного значения n существует $n!$ допустимых решений.

Теперь задача будет формулироваться следующим образом:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\dots,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\dots,n;$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Ограничения первой группы необходимы для того, чтобы каждая работа выполнялась один раз. Ограничения второй группы гарантируют, что каждому станку будет приписана одна работа.

Для иллюстрации задачи о назначениях рассмотрим таблицу с тремя работами и тремя станками.

		Станки		
		1	2	3
Виды работ	1	5	7	9
	2	14	10	12
	3	15	13	16

Специфическая структура задачи о назначениях позволяет использовать эффективный метод для ее решения.

Примечание. Оптимальное решение задачи не изменится, если из любой строки или столбца матрицы стоимостей вычесть произвольную постоянную величину.

Приведенное замечание показывает, что если можно построить новую матрицу $\overline{C}$ с нулевыми элементами и эти нулевые элементы или их подмножество соответствуют допустимому решению, то такое решение будет оптимальным:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 14 & 10 & 12 \\ 15 & 13 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (0) & 2 & 2 \\ 4 & 0 & (0) \\ 2 & (0) & 1 \end{pmatrix} = \overline{C}.$$

0 0 2

Оптимальное назначение:

$x_{11}^{*} = 1,\ x_{23}^{*} = 1,\ x_{32}^{*} = 1,$ остальные $x_{ij}^{*} = 0$,

$F(X^*) =$ 5 + 12 + 13 = 30.

К сожалению, не всегда удается определить решение так просто.

Венгерский алгоритм

Шаг 1. Редукция строк и столбцов.

Цель данного шага состоит в получении максимально возможного числа нулевых элементов в матрице стоимостей. Для этого из всех элементов каждой строки вычитают минимальный элемент соответствующей строки, а затем из всех элементов каждого столбца полученной матрицы вычитают минимальный элемент соответствующего столбца. В результате получают редуцированную матрицу стоимостей и переходят к поиску назначений.

Шаг 2. Определение назначений.

а) Найти строки, содержащие ровно один невычеркнутый нулевой элемент. В каждой такой строке произвести назначение, соответствующее невычеркнутому нулевому элементу. В каждом столбце, в котором было произведено назначение, вычеркнуть все невычеркнутые ранее нулевые элементы. Строки рассматриваются в порядке возрастания их номеров.

б) Найти столбцы, содержащие ровно один невычеркнутый нулевой элемент. В каждом таком столбце произвести назначение, соответствующее невычеркнутому нулевому элементу. В каждой строке, в которой было произведено назначение, вычеркнуть все невычеркнутые ранее нулевые элементы. Столбцы рассматриваются в порядке возрастания их номеров.

в) Выполнять пункты а) и б) до тех пор, пока не будет вычеркнуто максимально возможное число нулевых элементов. Если построенное назначение полное, то оно является оптимальным.

Если некоторые нули остались невычеркнутыми, то можно попытаться найти полное назначение.

Если нельзя найти полного назначения, то необходимо провести дальнейшую модификацию матрицы стоимостей, т.е. перейти к шагу 3.

Шаг 3. Модификация редуцированной матрицы.

Для редуцированной матрицы стоимостей:

а) вычислить число нулей в каждой невычеркнутой строке и каждом невычеркнутом столбце;

б) вычеркнуть строку или столбец с максимальным числом нулей;

в) выполнять пункты а) и б) до тех пор, пока не будут вычеркнуты все нули;

г) из всех невычеркнутых элементов вычесть минимальный невычеркнутый элемент и прибавить его к каждому элементу, расположенному на пересечении двух линий.

Перейти к шагу 2.

Примечания

1) Если число линий, необходимое для того, чтобы вычеркнуть нулевые элементы, равно числу строк (столбцов), то существует полное назначение.

2) Если исходная задача является задачей максимизации, то все элементы матрицы стоимостей следует умножить на (–1) и сложить их с достаточно большим числом так, чтобы матрица не содержала отрицательных элементов. Затем задачу следует решать как задачу минимизации.

Пример 6.7. Покажем работу венгерского алгоритма на примере задачи о назначениях со следующей матрицей стоимостей:

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Итерация 1.

Шаг 1. Редукция строк и столбцов.

Значения минимальных элементов строк 1, 2, 3 и 4 равны 2, 4, 11 и 4 соответственно. Вычитая из элементов каждой строки соответствующее минимальное значение, получим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Значения минимальных элементов столбцов 1, 2, 3 и 4 равны 0, 0, 5 и 0 соответственно. Вычитая из элементов каждого столбца соответствующее минимальное значение, получим следующую матрицу:

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.

а) Строки 1, 2 и 4 содержат по одному невычеркнутому нулю. Рассматривая эти строки в порядке возрастания их номеров, произведем вначале назначение, соответствующее элементу (1,1), и вычеркнем нулевой элемент (4,1). Затем произведем назначение, соответствующее элементу (2,2). Строка 4 не может быть использована, поскольку нулевой элемент (4,1) был вычеркнут.

б) Столбцы 3 и 4 содержат по одному невычеркнутому нулю. Рассматривая эти столбцы в порядке возрастания их номеров, мы можем произвести третье назначение, соответствующее элементу (3,3). В столбце 4 назначение невозможно, так как мы произвели назначение, соответствующее элементу (3,3). После выполнения данного шага матрица стоимостей имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} (0) & 8 & 2 & 5 \\ 11 & (0) & 5 & 4 \\ 2 & 3 & (0) & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ни одно полное назначение не может быть получено, и необходимо провести дальнейшую модификацию редуцированной матрицы стоимостей.

Шаг 3. Модификация редуцированной матрицы.

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

а) Число нулей в строках 1, 2, 3 и 4 равно 1, 1, 2 и 1 соответственно. Для столбцов соответствующие величины равны 2, 1, 1 и 1.

б) Максимальное число нулей, по два, содержат строка 3 и столбец 1. Выбираем строку 3 и вычеркиваем все ее элементы горизонтальной линией.

в) Число невычеркнутых нулей в строках 1, 2 и 4 равно 1, 1 и 1 соответственно. Для столбцов соответствующие значения равны 2, 1, 0, и 0. Поэтому мы должны выбрать столбец 1 и вычеркнуть его вертикальной линией. После этого останется только один невычеркнутый нуль – элемент (2,2). Поэтому можно вычеркнуть либо строку 2, либо столбец 2. Вычеркивая строку 2 горизонтальной линией, получаем следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{bmatrix}.$$

г) Значение минимального невычеркнутого элемента равно 2. Вычитая его из всех невычеркнутых элементов и складывая его со всеми элементами, расположенными на пересечении двух линий, получаем новую матрицу стоимостей:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

Итерация 2.

Шаг 2. Выполняя вновь процедуру построения допустимого решения нулевой стоимости, получаем следующее оптимальное решение:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & (0) & 3 \\ 13 & (0) & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & (0) \\ (0) & 9 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

Оптимальное назначение:

$x_{13}^* = 1,\ x_{22}^* = 1,\ x_{34}^* = 1,\ x_{41}^* = 1,$ остальные $x_{ij}^* = 0$,

$F(X^*) =$ 9 + 4 + 11 + 4 = 28.

Пример 6.8. Задача размещения производства.

Компания разрабатывает план выпуска трех новых видов продукции. Предположим, что компания владеет пятью предприятиями и что на трех из них должны производиться новые виды продукции – по одному виду на одно предприятие. Ниже указаны издержки производства и сбыта единицы продукции.

1. Издержки производства единицы продукции (руб.):

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	23	38	15	5
2	8	29	6	35	5
3	5	8	3	4	7

2. Издержки сбыта единицы продукции (руб.):

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	50	20	10	13
2	7	90	8	35	60
3	5	5	4	15	6

Плановый объем годового производства, который позволил бы удовлетворить спрос, и плановая стоимость единицы продукции каждого вида следующие:

Вид продукции	Плановый объем производства	Плановая стоимость (руб.)
1	35000	55
2	160000	50
3	54000	30

Общие издержки на единицу продукции складываются из издержек производства и издержек сбыта. Поскольку продажная цена единицы каждого вида продукции известна, то можно вычислить прибыль на единицу продукции:

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	15	–18	–3	30	7
2	35	–69	36	–20	–45
3	20	17	23	11	17

Умножая прибыль, приходящуюся на единицу продукции, на годовой объем сбыта, можно получить общую годовую прибыль, соответствующую каждой паре «вид продукции-предприятие». Данные величины (в тыс. руб.) приведены в следующей таблице:

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	525	–630	–105	1050	245
2	5600	–11040	5760	–3200	–7200
3	1080	918	1242	594	918

Если прибыль рассматривать как отрицательные затраты, то исходная задача максимизации может быть сведена к минимизационной задаче о назначениях. Для того чтобы матрица стоимостей не содержала отрицательных элементов, сложим каждый элемент матрицы с числом 5760 и введем два вида фиктивной продукции (4 и 5), которой соответствует нулевая прибыль. В результате будет получена следующая матрица:

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	–525	630	105	–1050	–245
2	–5600	11040	–5760	3200	7200
3	–1080	–918	–1242	–594	–918

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	5235	6390	5865	4710	5515
2	160	16800	0	8960	12960
3	4680	4842	4518	5166	4842
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

	5235	6390	5865	4710	5515
	160	16800	0	8960	12960
Þ C =	4680	4842	4518	5166	4842
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0

Итерация 1.

Шаг 1.

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 525 & 1680 & 1155 & 0 & 805 \\ 160 & 16800 & 0 & 8960 & 12960 \\ 162 & 324 & 0 & 648 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 2.

$$\begin{pmatrix} 525 & 1680 & 1155 & (0) & 805 \\ 160 & 16800 & (0) & 8960 & 12960 \\ 162 & 324 & 0 & 648 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 3.

$$\begin{pmatrix} 525 & 1680 & 1155 & 0 & 805 \\ 160 & 16800 & 0 & 8960 & 12960 \\ 162 & 324 & 0 & 648 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итерация 2.

Шаг 2. Воспользуемся замечанием 1. Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} 365 & 1520 & 1155 & (0) & 645 \\ (0) & 16640 & 0 & 8960 & 12800 \\ 2 & 164 & (0) & 648 & 164 \\ 0 & (0) & 160 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 160 & 160 & (0) \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение данной задачи следующее: производство первого вида продукции назначается предприятию 4, второго вида – предприятию 1, третьего вида – предприятию 3, четвертого вида – предприятию 2, пятого вида – предприятию 5. Очевидно, что 2 последних назначения являются фиктивными. Суммарная годовая прибыль, соответствующая данному решению, равна 1050 + 5600 + 1242 = 7892 (тыс. руб).

Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Каждому обучающемуся обеспечен доступ к следующим электронным библиотечным системам и профессиональным базам данных:

- ЭБС «Университетская библиотека онлайн».

Электронная библиотека ежегодно обновляется и пополняется.