Методические указания
по организации практических занятий
по МДК.02.03 Математическое моделирование

Специальность

09.02.07 Информационные системы и программирование

2023

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания к выполнению практических занятий по **МДК.2.3** Математическое моделирование предназначены для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях, а также для овладения студентами умений и навыков применять эти знания при самостоятельной работе.

Перечень практических занятий соответствует рабочей программе **ПМ.02** Осуществление интеграции программных модулей

Составитель (автор): преподаватель колледжа

Рассмотрены Учебно- методическим советом колледжа

Протокол № от «30» июня 2023 г

Председатель УМС специальности ___________

и утверждены решением Педагогического совета колледжа.

Протокол № от «30» июня 2023 г

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение студентами практических занятий по дисциплине проводится с целью:
- закрепления полученных теоретических знаний по дисциплине;
- углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;
- формирования умений решать практические задачи;
- развития самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования активных умственных действий студентов, связанных с поисками рациональных способов выполнения заданий;
- подготовки к экзамену.

Методические указания выполняют функцию управления самостоятельной работой студента, поэтому каждое занятие имеет унифицированную структуру, включающую определение целей занятия, оснащения занятия, порядок выполнения работы, а также задания и контрольные вопросы для закрепления темы.

Содержание заданий практического занятия ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей ОППССЗ по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и овладению профессиональными компетенциями:
ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.
ПК 1.7 Осуществлять разработку кода программного продукта для решения различных практических задач с применением математических методов.
ПК 2.5 Реализовывать основные методологические подходы к решению математических задач, возникающих в ходе практической деятельности людей при работе в базе данных.

В процессе освоения дисциплины у студентов должны формироваться общие компетенции:
ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОКЗ. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.
ОК 10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- составлять простейшие математические модели задач, возникающих в практической деятельности людей;
- выбирать наиболее рациональный метод и алгоритм решения задачи, а также оценивать сложность выбранного алгоритма;
- разрабатывать алгоритмы для решения различных практических задач с применением математических методов.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать**:

- основные понятия и принципы моделирования;
- основные методологические подходы к решению математических задач, возникающих в ходе практической деятельности людей;
- основные методы решения детерминированных задач и задач в условиях неопределенности, возникающих в практической деятельности.

В методических указаниях приведены теоретический (справочный) материал в соответствии с темой занятия, обращение к которому поможет выполнить задания.

Организация выполнения и контроля практических занятий по дисциплине «Математические методы» является подготовительным этапом к сдаче экзамена по данной дисциплине.

Практическая работа 1 «Построение простейших математических моделей. Построение простейших статистических моделей.

Цели работы:
1. Отработать и закрепить умения записывать условие задачи в виде математических формул.
2. Отработать и закрепить умения записывать взаимосвязь показателей задачи в виде математической модели.

Методические указания по выполнению работы

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:
- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Таким образом, экономико-математическая формулировка и модель общей задачи линейного программирования имеют следующий вид:

найти максимальное (минимальное) значение линейной целевой функции

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min) \qquad (1)$$

при условиях-ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \le b_i, \quad i = \overline{1,k} & (2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1,m}, \quad k \le m; & (3) \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,l}; \quad l \le n, & (4) \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины.

Пример. Фирма выпускает 2 вида мороженного: сливочное и шоколадное. Для изготовления используются 2 исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженного и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженного		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0.8	0.5	400
Наполнители	0.4	0.8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженное превышает спрос на шоколадное мороженное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженное не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженного 16 ден.ед., шоколадного - 14 ден.ед. Определить количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение:
Составляем математическую модель задачи.
Вводим обозначения (переменные величины):
$\mathbf{x_1}$ – суточный объем выпуска сливочного мороженного, кг;
$\mathbf{x_2}$ - суточный объем выпуска шоколадного мороженного, кг
Целевая функция:
$f = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow max$
при ограничениях:
$0.8x_1 + 0.5x_2 \leq 400$ (ограничение по молоку);
$0.4x_1 + 0.8x_2 \leq 365$ (ограничение по наполнителям);
$x_1 + x_2 \leq 100$ (рыночное ограничение по спросу);
$x_2 \leq 350$ (рыночное ограничение по спросу);
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Вариант 1

Задание: построить математическую модель к задаче, пояснить условные обозначения.

1. Рацион кормления коров на ферме состоит из 3х продуктов, содержащих белки, кальций и витамины. Потребность одной коровы в сутки – не менее 2000 г белков и 210 г кальция. Потребность в витаминах строго дозирована и составляет 0,087 г в сутки.

	Содержание питательных веществ		
	Белки г/кг	Кальций г/кг	Витамины г/кг
Сено	50	10	2
Силос	70	6	3
Концентраты	180	3	1

Составить самый дешевый рацион, если цена 1 кг сена, силоса и концентратов составляет соответственно 1,5 2,0 6,0 у.е.

2. Завод производит продукцию 3х типов: П1, П2, П3. Для производства каждого изделия необходимо 3 технологические операции: О1, О2, О3. В день можно производить не более 170 единиц продукции. Найти наиболее прибыльный план производства.

Операции	Объем работ на 1 изделие (чел.-час)			Дневной фонд времени, час
	П1	П2	П3	
О1	2	3	2	360
О2	1	2	3	240
О3	1	1	2	180
Прибыль от 1-го изделия, $	15	22	19	

В какой операции наиболее целесообразны сверхурочные работы, максимально увеличивающие фонд рабочего времени, если их стоимость $4 (чел.-час)?

3. Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа В - 2 чел.-ч. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства детали типа А уходит 2 кг полимерного материала и 5 кг листового материала, а для производства одной детали типа В — 4 кг полимерного материала и 3 кг листового металла. Еженедельные запасы каждого материала - по 10 000 кг. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук. Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали типа А и В составляет соответственно 1,1 руб. и 1,5 руб.

Вариант 2

Задание: построить математическую модель к задаче, пояснить условные обозначения.

1. Туристская фирма в летний сезон обслуживает в среднем 7500 туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

Показатели	Судно	
	I	II
Пассажировместимость, чел	2000	1000
Горючее,т	12000	7000
Экипаж, чел.	250	100

В месяц выделяется 60 000 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 700 человек.
Определите количество судов I и II типа, чтобы обеспечить максимальный доход, который составляет от эксплуатации судов I типа 20 млн руб., а II типа - 10 млн руб. в месяц.

2. Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен употреблять в сутки некоторое количество белков, жиров, углеводов и витаминов. Имеются два вида пищи: I и II. Содержание питательных веществ в I кг пищи, суточная норма и стоимость одного кг пищи каждого вида даны в таблице.

Питательные вещества	Вид пищи		Суточная норма
	I	II	

Жиры	1	10/3	10
Белки	4	2	12
Углеводы	2	2/8	14
Витамины	0	1	1
Стоимость 1 кг	20 коп.	24 коп.	——

Как нужно организовать питание, чтобы пища содержала необходимое количество питательных веществ, а стоимость была бы минимальной?

3. Обработка деталей А и В может производиться на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль от реализации детали А – 100 ден. ед., детали В – 160 ден. ед. Исходные данные приведены в таблице. Определить производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: спрос на деталь А не менее 300 шт., на деталь В - не более 200 шт.

Станок	Норма времени на обработку одной детали, ч		Время работы станка, ч
	А	В	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Вариант 3

Задание: построить математическую модель к задаче, пояснить условные обозначения.

1. В процессе производства два изделия А и В должны пройти обработку на станках I, II и III. Время обработки каждого изделия на каждом из этих станков задано таблицей

Станки / Изделия	I	II	III
А	1	4	1
В	1/4	2	4

Станки можно использовать соответственно в течение 45, 100 и 60 часов. Продажная цена изделия А–6 рублей, а изделия В–4 рубля. В каком соотношении следует производить изделия А и В, чтобы получить максимальную прибыль?

2. Малое предприятие арендовало минипекарню для производства чебуреков и беляшей. Мощность пекарни позволяет выпускать в день не более 50 кг продукции. Ежедневный спрос на чебуреки не превышает 260 штук, а на беляши — 240 штук. Суточные запасы теста и мяса и расходы на производство каждой единицы продукции приведены в таблице. Определить оптимальный план ежедневного производства чебуреков и беляшей, обеспечивающих максимальную выручку от продажи.

	Расход на производство,		Суточные запасы сырья,
	чебурека	беляша	
Мясо	0,35	0,6	21

Тесто	0,65	0,3	22
Цена, руб-/кг	50,0	80,0	

3. АО «Механический завод» при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. При этом обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. Необходимые исходные данные приведены в таблице. Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Оборудование	Деталь				Полезный фонд времени, станко-ч
	1		2		
	Технологический способ				
	1	2	1	2	
Фрезерное	2	2	3	0	20
Токарное	3	1	1	2	37
Сварочное	0	1	1	4	30
Прибыль, ден.ед	11	6	9	6	

Вариант 4

Задание: построить математическую модель к задаче, пояснить условные обозначения.

1. Фирма производит и продает столы и шкафы из древесины хвойных и лиственных пород. Расход каждого вида в кубометрах на каждое изделие задан в таблице.

	Расход древесины, м^3		Цена изделия, тыс. руб.
	хвойные	лиственные	
Стол	0,15	0,2	0,8
Шкаф	0,3	0,1	1.6
Запасы древесины, м^3	80	40	

Определите оптимальное количество столов и шкафов, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.

2. Фирма решила открыть на основе технологии производства чешского стекла, фарфора и хрусталя линию по изготовлению ваз и графинов и их декорирование. Затраты сырья на производство этой продукции представлены в таблице.

Сырье	Расход сырья на		Поставки сырья в неделю, кг
	ваза	графин	
Кобальт	20	18	30
Сусальное 24-каратное золото	13	10	12
Оптовая цена, руб./шт.	700	560	

Определите оптимальный объем выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продаж, если спрос на вазы не превышает 200 шт. в неделю.

3. Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка «Колокольчик» и «Буратино». Для производства 1 л. «Колокольчика» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для «Буратино» - 0,04 ч, а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг специального ингредиента и 24 ч работы оборудования. Доход от продажи 1 л «Колокольчика» составляет 0,25 руб., а «Буратино» - 0,35 руб. Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от их продажи.

Контрольные вопросы:

1. Что такое математическое моделирование?
2. Что такое модель?
3. Классификация моделей.
4. Алгоритм моделирования в задачах коммерческой деятельности.
5. Классификация математических моделей.

Практическая работа 2 «Решение простейших однокритериальных задач»

Цели работы:
1. Отработать и закрепить умения графически решать системы неравенств с двумя переменными.
2. Отработать и закрепить умения записывать взаимосвязь показателей задачи в виде математической модели.

Методические указания к выполнению работы

Решение системы неравенств с двумя переменными графическим методом включает следующие этапы.

1. На плоскости X_1OX_2 строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств.
3. Строят многоугольник решений.

Пример:

Решить систему неравенств графическим способом.

$$P = \begin{cases} X_1 + 2 \times X_2 \le 6 \\ 2 \times X_1 + X_2 \le 8 \\ X_1 + 0.8 \times X_2 \le 5 \\ -X_1 + X_2 \le 1 \\ X_2 \le 2 \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 \end{cases} \begin{pmatrix} (a) \\ (б) \\ (в) \\ (г) \\ (д) \\ (e) \end{pmatrix}$$

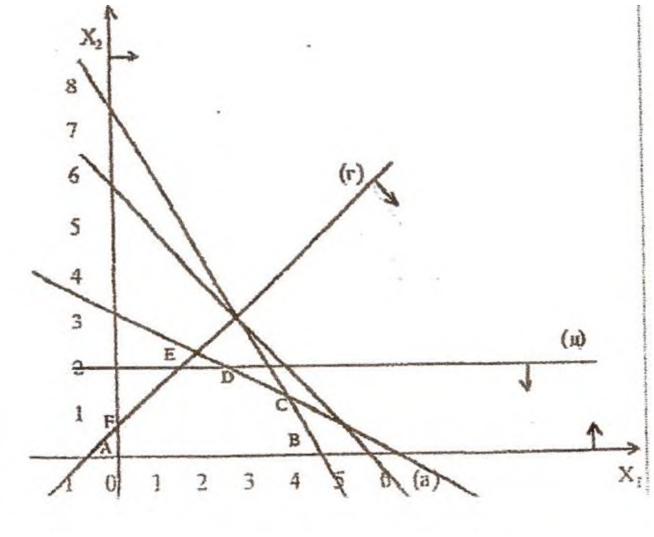
Решение:

<u>Шаг 1.</u> Строим область допустимых решений - область P, т.е. геометрическое место точек, в котором одновременно удовлетворяются все ограничения ЗЛП. Каждое из неравенств (а)-(д) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми:

$$\begin{cases} X_1 + 2 \times X_2 = 6 \\ 2 \times X_1 + X_2 = 8 \\ X_1 + 0.8 \times X_2 = 5 \\ -X_1 + X_2 = 1 \\ X_2 = 2 \end{cases} \begin{pmatrix} (a) \\ (б) \\ (в) \\ (г) \\ (д) \end{pmatrix}$$

Условия неотрицательности переменных (е) ограничивают область допустимых решений первым квадратом. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных

Решение системы – многоугольник ABCDEF.



Вариант 1

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + x_2 \le 5$

$3x_1 - x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

б) $x_1 + x_2 \le 4$

$6x_1 + 2x_2 \ge 6$

$x_1 + 5x_2 \ge 5$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений: Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров: мужские носки и женские чулки. Фирма получает прибыль в размере 10 руб. от производства и продажи одной пары чулок и в размере 4 руб. от производства и продажи одной пары носков. Производство каждого изделия осуществляется на трех участках. Затраты труда (в часах) на производство одной пары указаны в следующей таблице для каждого участка:

Участок производства	Чулки	Носки
1	0,02	0,01
2	0,03	0,01
3	0,03	0,02

Руководство рассчитало, что в следующем месяце фирма ежедневно будет располагать следующими ресурсами рабочего времени на каждом из участков: 60 ч на участке 1; 70 ч на участке 2 и 100 ч на участке 3. Сколько пар носков и чулок следует производить ежедневно, если фирма хочет максимизировать прибыль?

Вариант 2

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + x_2 \le 5$

$3x_1 - x_2 \le 3$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

б) $x_1 - x_2 \leq 3$
$x_1 + x_2 \leq 9$
$-x_1 + x_2 \geq 3$
$x_1 + x_2 \geq 3/2$
$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений: После предпринятой рекламной компании фирма «Отдых» испытывает рост спроса на два типа мангалов для приготовления шашлыков на открытом воздухе – газовые и угольные. Фирма заключила контракт на ежемесячную поставку в магазины 300 угольных и 300 газовых мангалов. Производство мангалов ограничивается мощностью следующих трех участков: производства деталей, сборки и упаковки. В таблице показано, сколько человекочасов затрачивается на каждом участке на каждую единицу продукции, а также приведен допустимый ежемесячный объем трудозатрат:

Участок	Трудозатраты на производство одного мангала, ч		Фонд времени, человекочасы
	угольного	газового	
Производство	5	8	2600
Сборка	0,8	1,2	400
Упаковка	0,5	0,5	200

Вариант 3

1. Решить графически систему неравенств:
а) $x_1 + 3x_2 \geq 3$
$-2x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

б) $-x_1 + 3x_2 \leq 9$
$2x_1 + 3x_2 \leq 18$
$2x_1 - x_2 \leq 10$
$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений: Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы каждого вида товара и прибыль, получаемая предприятием, а также объем ресурсов указаны в таблице. Составить план выпуска товаров, дающий максимальную прибыль.

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 ед. товара				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, чел.	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч	10	14	8	16	130

Прибыль на 1 ед.товара, руб.	30	25	56	48	

Вариант 4

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + 3x_2 \geq 3$
$-2x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$

б) $x_1 - x_2 \leq 3$
$2x_1 + x_2 \geq 3$
$x_1 - 3x_2 \leq 1$
$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений: Обработка деталей А и В может производиться на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль от реализации детали А – 100 ден. ед., детали В – 160 ден. ед. Исходные данные приведены в таблице. Определить производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: спрос на деталь А не менее 300 шт., на деталь В - не более 200 шт.

Станок	Норма времени на обработку одной детали, ч		Время работы станка, ч
	А	В	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Практическая работа 3 «Сведение произвольной задачи линейного программирования к основной задаче линейного программирования. Решение задач линейного программирования симплекс-методом»

Цели работы:
1. Отработать и закрепить умения графически решать системы неравенств с двумя переменными.
2. Отработать и закрепить умения записывать взаимосвязь показателей задачи в виде математической модели.

Методические указания к выполнению работы

Решение системы неравенств с двумя переменными графическим методом включает следующие этапы.

1. На плоскости X_1OX_2 строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств.
3. Строят многоугольник решений.

Пример:

Решить систему неравенств графическим способом.

$$P = \begin{cases} X_1 + 2 \times X_2 \le 6 & (а) \\ 2 \times X_1 + X_2 \le 8 & (б) \\ X_1 + 0.8 \times X_2 \le 5 & (в) \\ -X_1 + X_2 \le 1 & (г) \\ X_2 \le 2 & (д) \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 & (е) \end{cases}$$

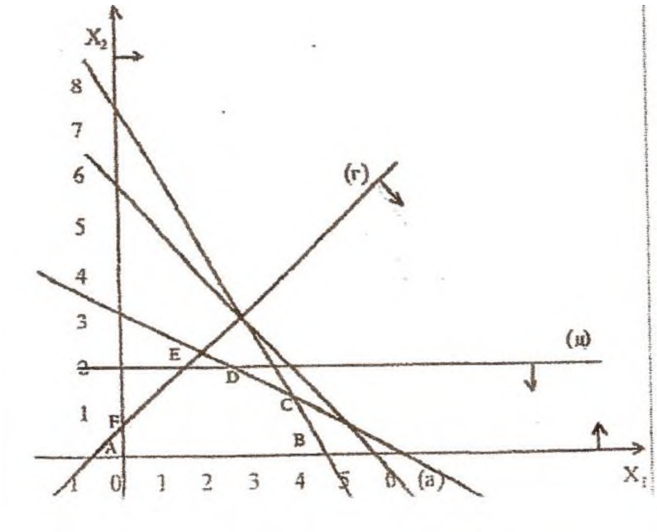
Решение:

Шаг 1. Строим область допустимых решений - область P, т.е. геометрическое место точек, в котором одновременно удовлетворяются все ограничения ЗЛП. Каждое из неравенств (а)-(д) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми:

$$\begin{cases} X_1 + 2 \times X_2 = 6 & (а) \\ 2 \times X_1 + X_2 = 8 & (б) \\ X_1 + 0.8 \times X_2 = 5 & (в) \\ -X_1 + X_2 = 1 & (г) \\ X_2 = 2 & (д) \end{cases}$$

Условия неотрицательности переменных (е) ограничивают область допустимых решений первым квадратом. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных

Решение системы – многоугольник ABCDEF.



Вариант 1

1. Решить графически систему неравенств:
   а) $x_1 + x_2 \leq 5$
   $3x_1 - x_2 \leq 3$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

   б) $x_1 + x_2 \leq 4$
   $6x_1 + 2x_2 \geq 6$
   $x_1 + 5x_2 \geq 5$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений: Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров: мужские носки и женские чулки. Фирма получает прибыль в размере 10 руб. от производства и продажи одной пары чулок и в размере 4 руб. от производства и продажи одной пары носков. Производство каждого изделия осуществляется на трех участках. Затраты труда (в часах) на производство одной пары указаны в следующей таблице для каждого участка:

Участок производства	Чулки	Носки
1	0,02	0,01
2	0,03	0,01
3	0,03	0,02

Руководство рассчитало, что в следующем месяце фирма ежедневно будет располагать следующими ресурсами рабочего времени на каждом из участков: 60 ч на участке 1; 70 ч на участке 2 и 100 ч на участке 3. Сколько пар носков и чулок следует производить ежедневно, если фирма хочет максимизировать прибыль?

Вариант 2

1. Решить графически систему неравенств:
   а) $x_1 + x_2 \leq 5$
   $3x_1 - x_2 \leq 3$
   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

   б) $x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 9$
$-x_1 + x_2 \geq 3$
$x_1 + x_2 \geq 3/2$
$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений: После предпринятой рекламной компании фирма «Отдых» испытывает рост спроса на два типа мангалов для приготовления шашлыков на открытом воздухе – газовые и угольные. Фирма заключила контракт на ежемесячную поставку в магазины 300 угольных и 300 газовых мангалов. Производство мангалов ограничивается мощностью следующих трех участков: производства деталей, сборки и упаковки. В таблице показано, сколько человекочасов затрачивается на каждом участке на каждую единицу продукции, а также приведен допустимый ежемесячный объем трудозатрат:

Участок	Трудозатраты на производство одного мангала, ч		Фонд времени, человекочасы
	угольного	газового	
Производство	5	8	2600
Сборка	0,8	1,2	400
Упаковка	0,5	0,5	200

Вариант 3

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + 3x_2 \geq 3$
$-2x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

б) $-x_1 + 3x_2 \leq 9$
$2x_1 + 3x_2 \leq 18$
$2x_1 - x_2 \leq 10$
$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений: Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы каждого вида товара и прибыль, получаемая предприятием, а также объем ресурсов указаны в таблице. Составить план выпуска товаров, дающий максимальную прибыль.

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 ед. товара				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, чел.	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч	10	14	8	16	130
Прибыль на 1 ед.товара, руб.	30	25	56	48	

Вариант 4

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + 3x_2 \geq 3$
$-2x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

б) $x_1 - x_2 \leq 3$
$2x_1 + x_2 \geq 3$
$x_1 - 3x_2 \leq 1$
$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений: Обработка деталей А и В может производиться на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль от реализации детали А – 100 ден. ед., детали В – 160 ден. ед. Исходные данные приведены в таблице. Определить производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: спрос на деталь А не менее 300 шт., на деталь В - не более 200 шт.

Станок	Норма времени на обработку одной детали, ч		Время работы станка, ч
	А	В	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Практическая работа 4 «Нахождение начального решения транспортной задачи. Решение транспортной задачи методом потенциалов».

Цели работы:

- Научиться записывать математическую модель транспортной задачи.
- Научиться строить опорный план транспортной задачи.

Методические указания по выполнению работы.

1. Построение математической модели транспортной задачи

Мы рассмотрели общие подходы к решению задач линейного программирования. Однако существуют частные типы задач линейного программирования, которые в силу своей структуры допускают решения более простыми методами. Мы остановимся только на одной из них – так называемой транспортной задаче.

Постановка транспортной задачи

Однородный груз, имеющийся в *m* пунктах отправления (производства) A1, A2, ..., Am соответственно в количествах a1, a2, ..., am единиц, требуется доставить в каждый из n пунктов назначения (потребления) B1, B2, ..., Bn соответственно в количествах b1, b2, ..., bn единиц. Стоимость перевозки (тариф) единицы продукции из Ai в Bj известна для всех маршрутов Ai, Bj и c_{ij} (i = 1, m; j = 1, n). Требуется составить такой план перевозок, при котором весь груз из пунктов отправления вывозится, и запросы всех пунктов потребления удовлетворяются (закрытая модель), т. е:

$$\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$$

а суммарные транспортные расходы минимальны.

Математическая модель транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{1n} = a1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a2 \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = am \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b2 \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = bn \\ x_{ij} \ge 0, i = 1, m;\ j = 1,\ n \end{cases}$$

Будем называть любой план перевозок *допустимым*, если он удовлетворяет системам ограничений и требованиям неотрицательности.
Допустимый план, будем называть *опорным*, если в нем отличны от нуля не более **m+n-1** базисных перевозок, а остальные перевозки равны 0.
План будет называться *оптимальным*, если он, среди всех допустимых планов, приводит к минимальной суммарной стоимости перевозок.

2.Методы решения транспортных задач

Так как транспортная задача является задачей линейного программирования, то её можно решать симплекс-методом, но в силу своей особенности её можно решить гораздо проще. Условия задачи удобно располагать в таблице, вписывая в ячейки количество перевозимого груза из Ai в Bj груза $X_{ij} \geq 0$, а в маленькие клетки – соответствующие тарифы C_{ij}.

Потребители / Поставщики	B1	B2	…	Bn	Запасы
A1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	…	X_{1n} C_{1n}	a1
A2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	…	X_{2n} C_{2n}	a2
…	…	…	…	…	…
Am	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	…	X_{mn} C_{mn}	am
Потребности	b1	b2	…	bn	

Затем решение задачи разбивается на два этапа:

1. *Определение опорного плана.*
2. *Нахождение оптимального решения путем последовательных операций.*

1. Найдем вначале допустимое (опорное) решение транспортной задачи. Это решение можно найти, используя метод "северо-западного угла" или метод "минимального элемента".

Метод северо-западного угла (диагональный)

Сущность метода *заключается в том, что на каждом шаге заполняется левая верхняя (северо-западная) клетка оставшейся части таблицы, причем максимально возможным числом*: либо полностью выносится груз из Ai, либо полностью удовлетворяется потребность Bj. Процедура продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге не исчерпаются запасы ai и не удовлетворятся все потребности bj. В заключении проверяют, удовлетворяют ли найденные компоненты плана X_{ij} горизонтальным и вертикальным уравнениям.

Метод наименьшего элемента

Сущность метода *в том, что на каждом шаге заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф; в случае наличия нескольких таких равных тарифов заполняется любая из них.* В остальном действуют аналогично предыдущему способу.

3.Метод потенциалов решения транспортных задач

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{1n} = a1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a2 \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = am \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b2 \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = bn \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, m; j = 1, n \end{cases} \quad (1)$$

Соотношения (1) определяют систему из m+n-1 линейных уравнений с m+n известными, имеющую бесчисленное множество решений; для её определённости одному неизвестному присваивают произвольное значение (обычно альфа равное 0), тогда все остальные неизвестные определяются однозначно.

Метод потенциалов:
Введем строку потенциалов u_i и столбец потенциалов v_j. Полагая, что $u_1=0$, а остальные u_i и v_j найдем так, чтобы

а) *для заполненных ячеек* выполнялись равенства $u_i + v_j = c_{ij}$;

б) *для незаполненных ячеек* выполнялись равенства $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

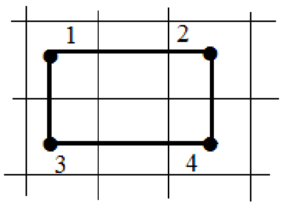
Критерий оптимальности
Если известны потенциалы решения X_0 транспортной задачи и для всех незаполненных ячеек выполняются условия $\Delta_{ij} \geq 0$ то X_0 является оптимальным планом транспортной задачи.
Если план не оптимален, то необходимо перейти к следующему плану (таблице) так, чтобы транспортные расходы не увеличивались.

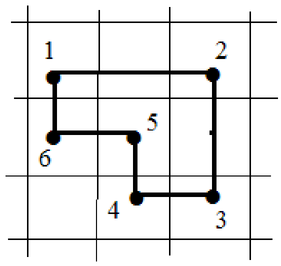
Цикл перерасчёта таблицы – это последовательность ячеек, удовлетворяющая условиям:
1. Одна ячейка пустая, все остальные занятые.
2. Любые две соседние ячейки находятся в одной строке или в одном столбце.

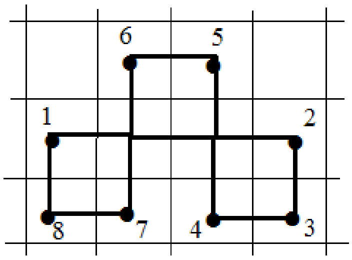
Пустой ячейке присваивают знак "+", остальным – поочерёдно знаки "–" и "+".
Для перераспределения плана перевозок с помощью цикла перерасчёта сначала находят незаполненную ячейку (r, s), в которой $\alpha r+\beta s > Crs$, и строят соответствующий цикл; затем в минусовых клетках находят число $X = \min(X_{ij})$. Далее составляют новую таблицу по следующему правилу:
3. В плюсовых клетках добавляем X.
4. Из минусовых клеток вычитаем X.
5. Все остальные клетки вне цикла остаются без изменения.

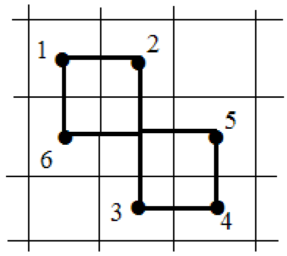
Получим новую таблицу, дающую новое решение X, такое, что $F(X_1) \leq F(X_0)$; оно снова проверяется на оптимальность через конечное число шагов, обязательно найдем оптимальный план транспортной задачи, ибо он всегда существует.

Различные виды циклов перерасчета таблицы









Пример.

Имеется три поставщика продукции с соответствующими предложениями а1, а2, а3 и три потребителя в1, в2, в3 соответственно. Стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления до каждого пункта назначения задается матрицей С.

Составить план перевозок всей продукции от поставщиков потребителям, при котором суммарные затраты на перевозки минимальны.

а1=50, а2=60, а3=90
в1=90, в2=70, в3=40

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

Эта задача является закрытой транспортной задачей, так как

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$$

50+60+90=90+70+40.
200=200.

Для ее решения воспользуемся таблицей, в которой будем составлять последовательно планы перевозок.

Составим первый план перевозок. В этом плане отличными от нуля перевозками x_{ij} могут быть лишь (m+n-1) значений, где m – число поставщиков, n – число потребителей. Остальные переменные заведомо равны нулю. Будем их в таблице помечать прочерком.

В нашем примере m=3, n=3.

Значит число заполненных клеток: 3+3-1=5.

Для составления плана последовательно заполняем клетки таблицы так, чтобы на каждом шаге исчерпывалась или потребность какого-либо потребителя, или возможности какого-либо поставщика. В соответствующем столбе или строке ставим в остальных пустых клетках прочерки. Если при этом одновременно исчерпывается и потребность и возможность, то вычеркивается что-то одно (столбец или строка). При таком построении плана перевозок заполненными окажутся ровно (m+n-1) клетки, а остальные прочеркиваются.

При построении первого опорного плана воспользуемся методом наименьшего элемента. Начнем с клетки с наименьшими затратами c_{ij} и на каждом шаге будем выбирать такую клетку.

В каждой клетке таблицы значения c_{ij} будем записывать в правом верхнем углу таблицы. В центре будем проставлять значения x_{ij}.

	В1	В2	В3		v_i
А1	1 3	3	2	50	2

	-	10	40		
A2	1 60	4 6 -	-1 1 -	60	1
A3	2 30	3 60	2 5 -	90	2
	90	70	40	200	
u_j	0	1	1		

Заполняем клетку (21), так как c_{21}=1 – наименьшее, значением x_{21}=60. При этом прочеркиваем вторую строку.

На втором шаге заполняем клетку (13), т.к. c_{13}=2 - наименьшее, значением x_{13}=40. При этом прочеркиваем третий столбец.

В оставшейся части таблицы наименьшее c_{31}=2, значит, заполняем клетку (31) значением x_{31}=30 (90-60=30). При этом прочеркиваем первый столбец.

Теперь остается наименьшее c_{12}=3, значит, заполняем клетку (12) значением x_{12}=10 (50-40=10). При этом прочеркиваем первая строка.

Наименьшее c_{32}=3, значит заполняем клетку (32) значением x_{32}=60 (70-10=60).

Число заполненных клеток равно 5.

Стоимость перевозок F при данном плане

$F = 10 \times 3 + 40 \times 2 + 60 \times 1 + 30 \times 2 + 60 \times 3 = 410$.

Для проверки оптимальности полученного плана воспользуемся методом потенциалов.

Введем строку потенциалов u_j и столбец потенциалов v_i. Полагая, что u_1=0, а остальные u_j и v_i найдем так, чтобы

а) *для заполненных клеток* выполнялись равенства $u_j + v_i = c_{ij}$;

б) *для незаполненных клеток* выполнялись равенства $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_j + v_i)$.

Оценки пустых клеток будем записывать в левых верхних углах клеток.

Для оптимальности плана должно выполняться условие $\delta_{ij} \geq 0$ для всех пустых клеток.

У нас $\delta_{23} = -1 < 0$, значит, план не оптимален. Уменьшим стоимость перевозок, заполнив клетку (23).

Для этого построим цикл перерасчета таблицы - это последовательность клеток, удовлетворяющая условиям:

6. Одна ячейка пустая, все остальные занятые.
7. Любые две соседние ячейки находятся в одной строке или в одном столбце.

Пустой ячейке присваивают знак "+", остальным – поочерёдно знаки "–" и "+".

В минусовых клетках находят число X = min(X_{ij}). Далее составляют новую таблицу по следующему правилу:

8. В плюсовых клетках добавляем X.
9. Из минусовых клеток вычитаем X.
10. Все остальные клетки вне цикла остаются без изменения.
11.

	B1	B2	B3		v_i
A1	1 3 -	+ 3 10	- 2 40	50	2
A2	- 1 60	4 6 -	-1 1 + -	60	1
A3	+ 2 30	- 3 60	2 5 -	90	2
	90	70	40	200	
u_j	0	1	1		

По циклу в клетку (23) перемещаем 40 единиц из клетки (13).
Получаем новый опорный план.

	B1	B2	B3		v_i
A1	1 3 -	3 50	0 2 -	50	2
A2	1 20	4 6 -	0 1 40	60	1
A3	2 70	3 20	3 5 -	90	2
	90	70	40	200	
u_j	0	1	0		

Для проверки оптимальности полученного плана воспользуемся методом потенциалов.

Так как среди оценок пустых клеток нет отрицательных, то построенный план оптимальный.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 \\ 20 & 0 & 40 \\ 70 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом стоимость перевозок $F_{\min} = 50 \times 3 + 20 \times 1 + 40 \times 1 + 70 \times 2 + 20 \times 3 = 410$.

Вывод: Для того, чтобы транспортные расходы на перевозку продукции были минимальны и составляли 410 ден.ед., необходимо из пункта А1 перевозить 50 ед. в пункт В2, из А2 – 20 ед. в В1 и 40 ед. в В3, из А3 – 70 ед. в В1 и 20 ед. в В3.

Задания для практической работы

Решить транспортную задачу.

Имеется три поставщика продукции с соответствующими предложениями а1, а2, а3 и три потребителя в1, в2, в3 соответственно. Стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления до каждого пункта назначения задается матрицей С.

Составить план перевозок всей продукции от поставщиков потребителям, при котором суммарные затраты на перевозки минимальны.

Вариант 1
а1=90, а2=40, а3=70
в1=50, в2=50, в3=100

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 2
а1=180, а2=80, а3=40
в1=100, в2=100, в3=200

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 3
а1=80, а2=70, а3=50
в1=45, в2=55, в3=100

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 4
а1=90, а2=40, а3=70
в1=85, в2=45, в3=70

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы:

1. Приведите пример транспортной задачи.
2. Когда транспортная задача называется вырожденной?
3. Укажите общий алгоритм решения транспортной задачи.
4. В чем суть метода потенциалов?
5. Что находится изначально: опорный план перевозок или оптимальный план перевозок?

Практическая работа 5 «Нахождение кратчайших путей в графе»

Цель работы:

1. Закрепить умения определять метрические характеристики графа.
2. Закрепить умения определять кратчайший путь от вершины s до вершины t с использованием алгоритма Дейкстры.

Методические указания к выполнению работы

Граф – это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек.

Метрические характеристики графов

В теории графов применяются:

1. **Матрица инциденций**. Это матрица A с n строками, соответствующими вершинам, и m столбцами, соответствующими рёбрам. Для ориентированного графа столбец, соответствующий дуге (x,y) содержит (-1) в строке, соответствующей вершине x и 1 в строке, соответствующей вершине y. Во всех остальных – 0. Петлю, т. е. дугу (x,x) можно представлять иным значением в строке x, например, 2.

   Если граф неориентированный, то столбец, соответствующий ребру (x,y) содержит 1, соответствующие x и y – нули во всех остальных строках.
2. **Матрица смежности**. Это матрица n*n где n – число вершин, где b_{ij} = 1, если существует ребро, идущее из вершины x в вершину y и b_{ij} = 0 в противном случае.
3. Пусть G=(X,U) - связный граф, а x_i и x_j - две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершины x_i и x_j (пути из x_i и x_j) называется *расстоянием* между вершинами x_i и x_j и обозначается ( ). Положим ( ) = ∞, если вершины x_i и x_j не соединены маршрутом (путем). Расстояние ( ) удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $d(x_i, x_i) = 0$;

2) $d(x_i, x_j) \geq 0$;

3) $d(x_i, x_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i = x_j$;

4) $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$ для симметрических графов;

5) $d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) \geq d(x_i, x_k)$

Расстояние для графа G удобно задавать матрицей расстояний. ***Матрицей расстояний*** графа с n вершинами называется квадратная матрица D порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если } x_i = x_j; \\ d(x_i, x_j), \text{если } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Для фиксированной вершины x_i величина $e(x_i) = \max\limits_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$ называется ***эксцентриситетом*** (отклоненностью) вершины x_i.

Максимальный среди эксцентриситетов вершин называется ***диаметром*** графа G и обозначается diam (G):

$$\operatorname{diam}(G) = \max_{x_i \in X} e(x_i) = \max_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его ***радиусом*** и обозначается через r(G):

$$r(G) = \min_{x_i \in X} e(x_i) = \min_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

Вершина, имеющая минимальный эксцентриситет, называется ***центром*** графа.

Для вершины число $P(x_i) = \sum_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$ называется ***передаточным числом***.

Вершина графа, которой соответствует минимальное передаточное число $\max_{x_i \in X} P(x_i)$ называется ***медианой*** графа. Центров и медиан в графе может быть несколько.

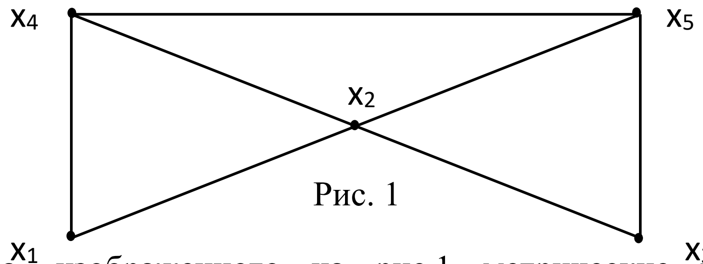


Рис. 1

***Пример*.** Для графа, изображенного на рис.1 метрические характеристики определяются следующим образом:

$$D = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} e(x_1) = 2 & P(x_1) = 6 \\ e(x_2) = 1 & P(x_2) = 4 \\ e(x_3) = 2 & P(x_3) = 6 \\ e(x_4) = 2 & P(x_4) = 5 \\ e(x_5) = 2 & P(x_5) = 5 \end{array}$$

Радиус графа равен 1, диаметр равен 2. Центр графа - вершина ; Медиана графа - вершина .

Задача о нахождении кратчайшего пути

Пусть дан граф, каждой дуге которого приписан вес. Задача о нахождении кратчайшего пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины до заданной конечной вершины, при условии, что такой путь существует.

Можно дать много практических интерпретаций задачи о кратчайших путях. Например, вершины могут соответствовать городам и каждая дуга – некоторому пути, длина которого представлена весом дуги. Мы ищем кратчайшие пути между городами. Вес дуги может соответствовать стоимости (или времени) передачи информации между вершинами. В этом случае мы ищем самый дешевый (или самый скорый) путь.

Данная задача может быть разбита на две:

- для начальной заданной вершины найти все кратчайшие пути от этой вершины к другим;
- найти кратчайшие пути между всеми парами вершин.

Алгоритм Дейкстры решения задачи

Алгоритм Дейкстры *алгоритм поиска кратчайшего пути во взвешенном графе между двумя заданными вершинами* s *и* t *при неотрицательных весах всех дуг.*

Пусть s - начальная вершина пути, t - конечная.

На каждой итерации алгоритма каждая вершина x_i графа имеет метку $l(x_i)$, которая может быть постоянной или временной. В первом случае $l(x_i)$ является длиной кратчайшего (s, x_i)-пути; во втором случае $l(x_i)$ - длина кратчайшего (s, x_i)-пути, проходящего через вершину x_i и вершины с постоянными метками. Таким образом временная метка $l(x_i)$, является оценкой сверху для длины кратчайшего (s, x_i)-пути, и, став на некоторой итерации постоянной, она остается такой до конца работы алгоритма.

Кроме $l(x_i)$, с вершинами графа связывается еще одна метка $Q(x_i)$.На каждой итерации $Q(x_i)$ является номером вершины, предшествующей x_i в кратчайшем (s, x_i)-пути.

После того, как последняя вершина t получила постоянную метку, с помощью меток Q(x) легко указать последовательность вершин, составляющих кратчайший (S,t)-путь:

$$(s..., Q^n(t)..., Q(Q(t)), Q(t),t),$$
$$Q^n(t)= Q(Q(...Q(t)) \quad (n \text{ раз}).$$

Перед началом работы алгоритма начальная вершина s имеет постоянную метку $l(s)=0$, а метки всех остальных вершин равны бесконечности (Ȟ) и являются временными. Обозначим через p последнюю из вершин, получивших постоянную метку.

Алгоритм Дейкстры включает следующие шаги:

1. Положить $l(s)=0$ и считать эту метку постоянной. Положить $l(x_i)=$ Ȟ для всех $x_i \neq s$, и считать эти метки временными. p = s.

2. Обновление пометок. Для всех вершин $x_i \in \Gamma(p)$, пометки которых временные, изменить пометки в соответствии с правилом:

$$l(x_i)=\min \{ l(x_i), l(p) +w(p, x_i) \}.$$

Если $l(x_i)> l(p) +w(p, x_i)$, то $Q(x_i) = p$.

3. Если $l(x_i)=$ Ȟ для всех вершин x_i, пометки которых временные, то в исходном графе отсутствуют пути из вершины s в вершины с временными метками. Останов алгоритма. В противном случае переход к шагу 4.

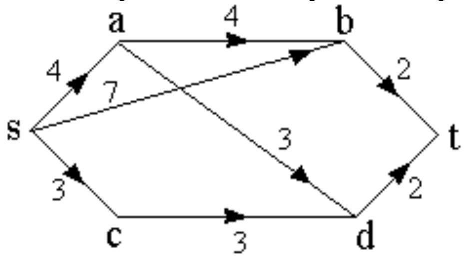
4. Превращение пометок в постоянные. Среди всех вершин с временными метками найти такую вершину x_i^* , для которой $l(x_i^*) = \min l(x_i)$ (метка минимальная) и считать эту пометку постоянной. Положить $p=x_i^*$. Пометку $Q(x_i^*)$ также считать постоянной.

5. Если $p \neq t$, перейти к шагу 2, а если p = t, то $l(p)$ - длина кратчайшего пути из s в t.

После определения длины кратчайшего пути сам кратчайший путь восстанавливается по постоянным меткам $Q(x_i)$.

Пример решения задачи

Для взвешенного орграфа найти кратчайший путь из вершины s в вершину t.



1. Помечаем в соответствии с алгоритмом вершины графа:

$l(s) = 0$,

$l(a) =$ Ȟ ,

$l(b) =$ Ȟ ,

l(c) = Ȟ ,
l(d) = Ȟ ,
l(t) = Ȟ .
Вершине s приписываем постоянную пометку, т.е. p = s.

2. Из вершины s помечаем остальные вершины:
l(a) = min {Ȟ, 0 + 4} = 4,
l(b) = min {Ȟ, 0 + 7} = 7,
l(c) = min {Ȟ, 0 + 3} = 3,
l(d) = Ȟ ,
l(t) = Ȟ .
У вершин a, b, c уменьшились пометки, следовательно Q(a) = s, Q(b) = s, Q(c) = s.

Вершине c приписываем постоянную пометку, т.е. p = c. Пометка Q(c)=s также становится постоянной.

3. Из вершины c помечаем остальные вершины:
l(a) = min {4, 3 + Ȟ} = 4,
l(b) = min {7, 3 + Ȟ} = 7,
l(d) = min {Ȟ, 3 + 3} = 6,
l(t) = Ȟ .

У вершины d уменьшилась пометка, следовательно Q(d) = c.

Вершине a приписываем постоянную пометку, т.е. p = a. Пометка Q(a)=s становится постоянной.

4. Из вершины a помечаем остальные вершины:
l(b) = min {7, 4 + 4} = 7,
l(d) = min {6, 4 + 3} = 6,
l(t) = Ȟ .

Вершине d приписываем постоянную пометку, т.е. p = d.. Пометка Q(d)=c становится постоянной.

5. Из вершины d помечаем остальные вершины:
l(b) = min {7, 6 + Ȟ} = 7,
l(t) = min {Ȟ, 6 + 2} = 8,
У вершины t уменьшилась пометка, следовательно Q(t) = d.

Вершине b приписываем постоянную пометку, т.е. p=b. Пометка Q(b)=s становится постоянной.

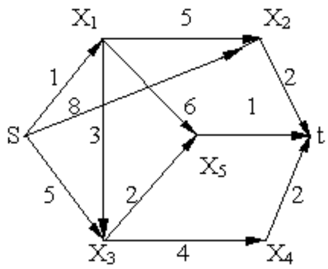
6. Из вершины b помечаем вершину t:
l(t) = min {8, 7 + 2} = 8.

Метки *l(t)* и Q(t)=d становятся постоянными.

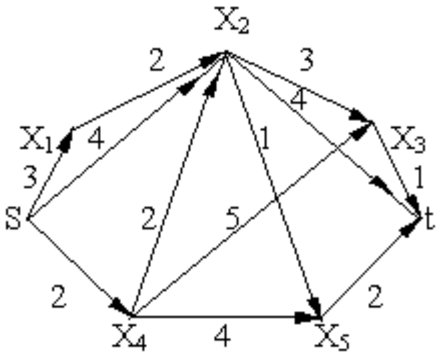
7. Восстанавливаем по меткам Q кратчайший путь из s в t:
Путь scdt длиной 8.

Задание. Определить кратчайший путь от вершины s до вершины t с использованием алгоритма Дейкстры.

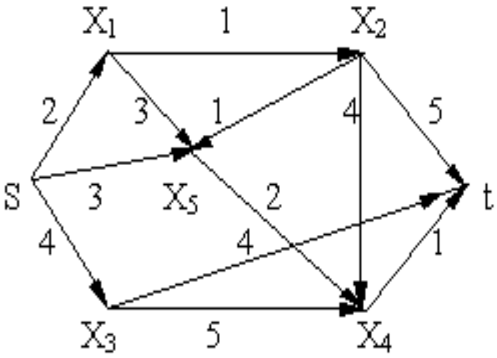
Вариант 1



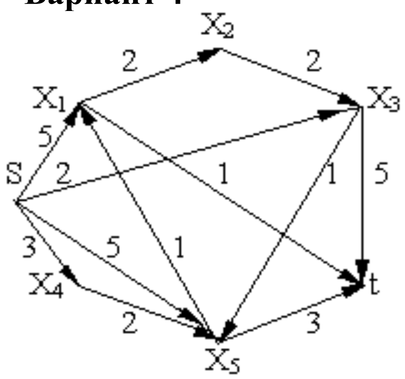
Вариант 2



Вариант 3



Вариант 4



Контрольные вопросы:

1. Что такое граф?
2. Приведите разновидности графов.

3. Может ли пустой граф быть ориентированным?
4. Нарисуйте полный граф.
5. Каким образом понятие дерева активно используется в информатике и программировании?
6. Перечислите метрические характеристики графов.
7. Дайте интерпретацию задаче о кратчайших путях.

Практическая работа 6 «Задача о распределении средств между предприятиями. Задача о замене оборудования»

Цели работы:

1. Научиться решать задачи динамического программирования.
2. Научиться разбивать весь процесс решения задачи на этапы.
3. Научиться выбирать оптимальную стратегию поведения.

Методические указания по выполнению работы

Динамическое программирование

1. Понятие задачи динамического программирования

Рассматриваемые ранее задачи характеризуются тем, что в них не учитываются изменения оптимизируемых параметров во времени – процессы считаются статичными. Выбирается некоторый период времени, и для него определяются проектируемые или планируемые значения показателей. При этом предполагается, что управляемые или неуправляемые параметры системы в течение всего планового времени не будут изменяться или, по крайней мере, не претерпят серьёзных изменений, требующих пересмотра принятых решений.

Однако в реальной жизни есть задачи, в которых необходимо учитывать изменения параметров систем во времени. Эти параметры могут меняться непрерывно или дискретно – от этапа к этапу. Например, из года в год меняется возраст машин и оборудования, изменяется производственная мощность и производительность труда на предприятиях. Очевидно, что необходимо принимать оптимальные решения на год (или другой срок) и одновременно на весь рассматриваемый период в целом с учётом возможных изменений параметров. Для решения такого вида задач, которые получили название **многошаговые**, разработан соответствующий математический аппарат, который получил название **динамическое программирование**.

Задача может быть сформулирована следующим образом:

Задача динамического программирования – определить u_i* (u_i* не только число, а может быть вектором, функцией) на каждом шаге, $i = 1, 2 \ldots, m$, и тем самым u* всей операции в целом.

Рассмотрим подход к решению данной задачи. Характерным для динамического программирования является то, что переменные рассматриваются вместе, а не последовательно – одна за другой. При этом вычислительная тема строится таким образом, что вместо одной задачи с n переменными решается серия задач с небольшим числом, а чаще с одной переменной. Сам же вычислительный процесс производится на основе метода последовательных приближений в два круга:

1. *От последнего шага к первому.*
2. *От первого шага к последнему или же наоборот, в зависимости от исходных данных.*

На первом круге ищется так называемое условное оптимальное решение. Оно выбирается так, чтобы все предыдущие шаги обеспечили максимальную эффективность последующего. Основу такого подхода составляет принцип оптимальности Беллмана, который формулируется следующим образом:

Нельзя получить оптимальное значение целевой функции i-шагового процесса, если для любого u_i, выбранного на шаге i, значение целевой функции для оставшихся i-1 шагов не является оптимальным при этом выбранном на i-шаге значении u_i.

Такой процесс продолжается до тех пор, пока решение не потеряет свой условный характер, т. е. до первого шага или последнего. Для него решение просто оптимально. Поэтому второй круг начинают именно с этого шага и последовательно переходят от условных к оптимальным решениям, тем самым обеспечивается оптимальность операции в целом.

Оптимальное распределение ресурсов

Пример:

Капитал 40 млн.руб. инвестор должен вложить в четыре инвестиционных проекта так, чтобы получить максимальный доход. Доходность проектов дана в таблице (вложения кратны 8 млн. руб.)

u	Прибыль от внедрения			
	f4(u)	**f3(u)**	**f2(u)**	**f1(u)**
8	**<u>55</u>**	**<u>39</u>**	35	32
16	58	53	76	68
24	90	80	**<u>120</u>**	115
32	100	120	135	134
40	140	145	158	147

Решение:

Это задача динамического программирования. Решение состоит из двух этапов. На первом этапе (от конца к началу) ищем условное оптимальное решение, на втором (от начала к концу) – ищем оптимальное решение задачи.

1 этап.

Распределяем капитал между четырьмя проектами и считаем получаемую прибыль *L(i), i*=8,16,24,32,40.

1 шаг: Денежные средства вкладываются в четвертый проект.

L(8)=**<u>55</u>**
L(16)=58
L(24)=90
L(32)=100
L(40)=140

2 шаг: Денежные средства вкладываются в четвертый и третий проекты.

u	Прибыль от внедрения	
	1 шаг	**f3(u)**
8	**<u>55</u>**	**<u>39</u>**
16	58	53
24	90	80
32	100	120
40	140	145

$L(8) = \max\{55_{8+0}; 39_{0+8}\} = 55$
$L(16) = \max\{58_{16+0}; \underline{55 + 39}_{8+8}; 53_{0+16}\} = \max\{58; \underline{94}; 53\} = \underline{94}$
$L(24) = \max\{90_{24+0}; 58 + 39_{16+8}; 55 + 53_{8+16}; 80_{0+24}\} = \max\{90; 97; 108; 80\} = 108$
$L(32) = \max\{100_{32+0}; 90 + 39_{24+8}; 58 + 53_{16+16}; 55 + 80_{8+24}; 120_{0+32}\} = \max\{100; 129; 111; 135; 120\} = 135$
$L(40) = \max\{140_{40+0}; 100 + 39_{32+8}; 90 + 53_{24+16}; 58 + 80_{16+24}; 55 + 120_{8+32}; 145_{0+40}\} =$
$= \max\{140; 139; 143; 138; 175; 145\} = 175$

3 шаг: Денежные средства вкладываются в четвертый, третий (2 шаг) и второй проекты.

u	**Прибыль от внедрения**	
	2 шаг	**f2(u)**
8	55	35
16	**94**	76
24	108	**<u>120</u>**
32	135	135
40	175	158

$L(8) = \max\{55_{8+0}; 35_{0+8}\} = 55$
$L(16) = \max\{94_{16+0}; 55 + 35_{8+8}; 76_{0+16}\} = \max\{94; 90; 76\} = 94$
$L(24) = \max\{108_{24+0}; 94 + 35_{16+8}; 55 + 76_{8+16}; 120_{0+24}\} = \max\{108; 129; 131; 120\} = 131$
$L(32) = \max\{135_{32+0}; 108 + 35_{24+8}; 94 + 76_{16+16}; 55 + 120_{8+24}; 135_{0+32}\} = \max\{135; 143; 170; 175; 135\} =$
$L(40) = \max\{175_{40+0}; 135 + 35_{32+8}; 108 + 76_{24+16}; \underline{94 + 120}_{16+24}; 55 + 135_{8+32}; 158_{0+40}\} =$
$= \max\{175; 170; 184; \underline{214}; 190; 158\} = \underline{214}$

4 шаг: Денежные средства вкладываются в четвертый, третий, второй (3 шаг) и первый проекты.

u	**Прибыль от внедрения**	
	3 шаг	**f1(u)**
8	55	32
16	94	68
24	131	115
32	175	134
40	**<u>214</u>**	147

$L(8) = \max\{55_{8+0}; 32_{0+8}\} = 55$
$L(16) = \max\{94_{16+0}; 55 + 32_{8+8}; 68_{0+16}\} = \max\{94; 87; 68\} = 94$
$L(24) = \max\{131_{24+0}; 94 + 32_{16+8}; 55 + 68_{8+16}; 115_{0+24}\} = \max\{131; 126; 123; 115\} = 131$
$L(32) = \max\{175_{32+0}; 131 + 32_{24+8}; 94 + 68_{16+16}; 55 + 115_{8+24}; 134_{0+32}\} =$
$= \max\{175; 163; 162; 170; 134\} = 175$
$L(40) = \max\{\underline{214}_{40+0}; 175 + 32_{32+8}; 131 + 68_{24+16}; 94 + 115_{16+24}; 55 + 134_{8+32}; 147_{0+40}\} =$
$= \max\{\underline{214}; 207; 199; 209; 189; 147\} = \underline{214}$

2 этап:

На четвертом шаге выбираем максимальное из полученных значений прибыли L(40)=214.

И возвращаясь в обратном порядке от таблицы к таблице (от 4 шага к 1) выбираем такие значения доходов, при которых и получено значение 214.

Максимальный доход 214 млн. руб. от вложенных средств может быть получен при следующем распределении средств:

1 проект – 0 млн. руб.
2 проект – 24 млн. руб.
3 проект – 8 млн. руб.
4 проект – 8 млн. руб.

Задание

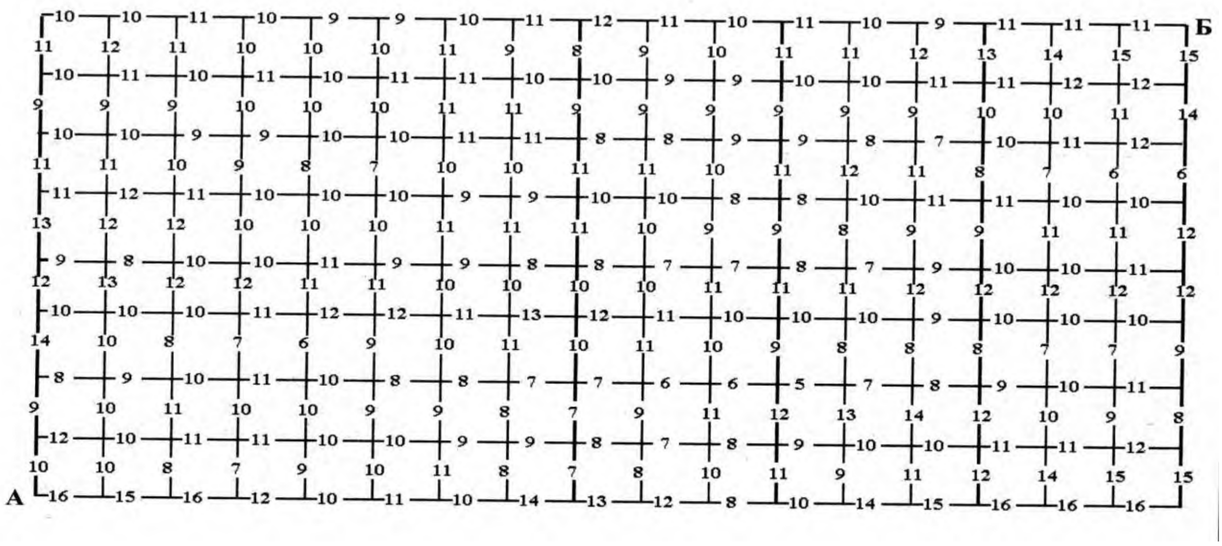
Задание 1. Распределите оптимальным образом денежные средства инвестора величиной *5 у.е.* между четырьмя предприятиями. Доход каждого предприятия от вложения в него *u* у.е.определяется функцией дохода f(u). Эти функции приведены в таблице.

u	Прибыль от внедрения по предприятиям			
	f4(u)	f3(u)	f2(u)	f1(u)
1	f4(1)	6	3	4
2	10	f3(2)	4	6
3	11	11	f2(3)	8
4	12	13	11	f1(4)
5	18	15	18	16

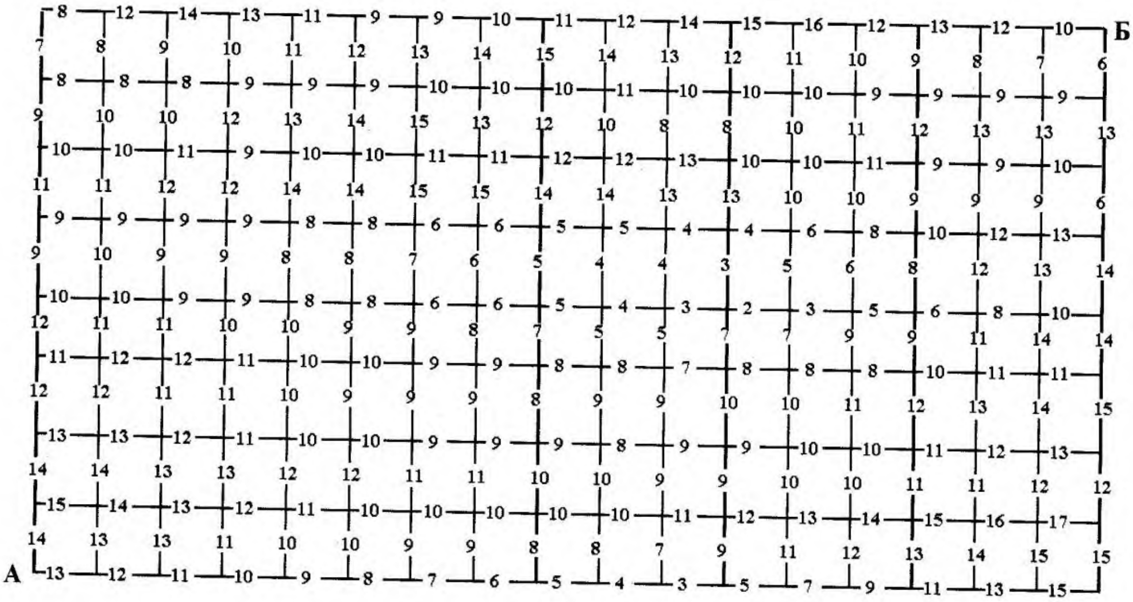
Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**
f4(1)	9	5	6	8
f3(2)	10	10	7	7
f2(3)	7	5	8	9
f1(4)	10	9	13	15

Задание 2. Из пункта А в пункт В необходимо проложить автомобильную трассу по самому экономичному пути.

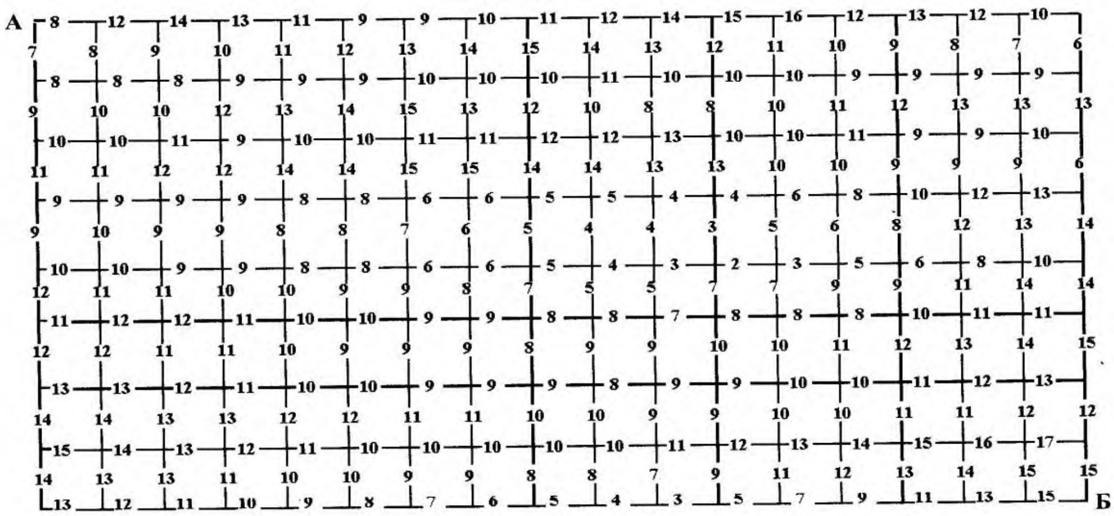
Вариант 1



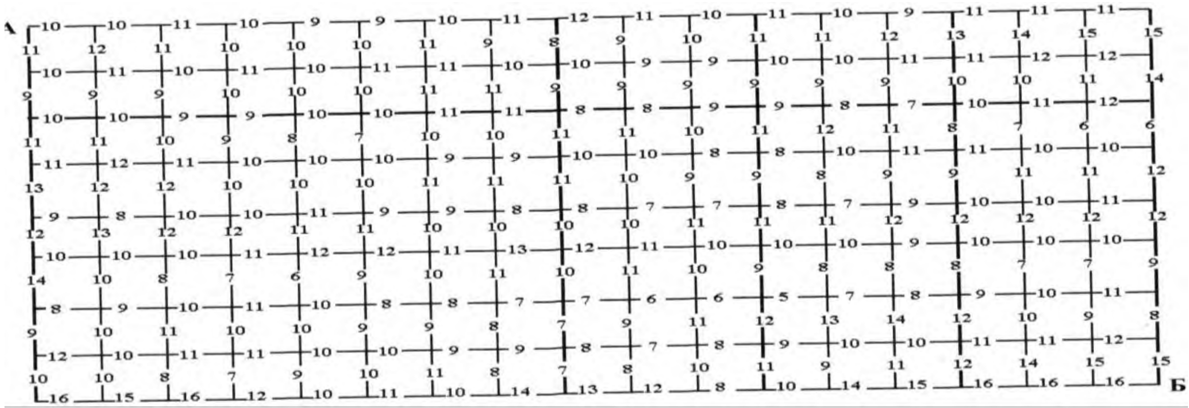
Вариант 2



Вариант 3



Вариант 4



Контрольные вопросы:

1. Какие задачи можно решать методами динамического программирования?

2. В чем заключаются достоинства и недостатки динамического программирования?
3. Объясните алгоритм решения задач динамического программирования.
4. Укажите принцип выбора направления движения.
5. В чем заключается принцип оптимальности?
6. Каков алгоритм распределения ресурсов?

Практическая работа 7 «Составление систем уравнений Колмогорова. Нахождение финальных вероятностей.

Цель занятия:

1. Отработать и закрепить умения составлять системы уравнений Колмогорова.
2. Отработать и закрепить умения находить финальные вероятности.
3. Отработать и закрепить умения определите основные показатели СМО.
4. Научиться оценивать надежность простейших систем методом Монте-Карло;
5. Научиться рассчитывать СМО с отказами методом Монте-Карло.

Методические указания к выполнению задания
Марковский случайный процесс

Построение математических моделей в условиях неопределенности - очень сложная или невыполнимая задача. Лишь для некоторых упрощенных случаев можно построить математическую модель.

Следует различать два вида неопределенности:

- вероятностные характеристики либо известны, либо могут быть получены в результате эксперимента. Такая неопределенность называется стохастической, и для большинства объектов, содержащих такую неопределенность, можно построить математическую модель, например выход из строя оборудования, приход нового клиента и т. д.
- вероятностные характеристики определить невозможно. В этом случае задачу можно попытаться решить с помощью экспертных оценок, но результат будет весьма приблизительным, например, каковы будут модели женской одежды через пять лет?

Строгую математическую модель с аналитическим вычислением всех интересующих величин можно построить только в том случае, если случайный процесс носит марковский характер.

Случайный процесс будет марковским, если вероятностные характеристики процесса в момент времени t зависят только от текущего (настоящего) состояния процесса в этот момент времени t и не зависят от того, как (каким способом и когда) рассматриваемый процесс перешел в текущее состояние.

Из всего многообразия марковских процессов хорошо изучены и представляют большой практический интерес ***марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.***

Под дискретным состоянием будем понимать, что процесс переходит из одного состояния в другое скачкообразно за очень короткое время (практически мгновенно), и количество этих состояний известно (фиксировано).

Под непрерывным временем будем понимать такое, при котором переход из одного допустимого состояния в другое допустимое состояние происходит в произвольные моменты времени, т. е. заранее не определенные.

Потоки событий. Однородные события, следующие друг за другом в произвольные моменты времени (случайно), называются потоком событий (или входным потоком заявок). Примерами потоков событий могут быть: поток пассажиров в авиакассе, поток посетителей парикмахерской, поток отказов технического устройства и т.д. Здесь под событием понимается факт поступления заявок на обработку (приход покупателя, наличие отказа технического средства, поступление телефонного вызова и т.д.), а не результат его обработки (как это рассматривается в теории вероятностей). Поэтому в системах массового обслуживания вероятностными характеристиками будет обладать не отдельное событие, а интервал времени.

Интенсивностью λ потока событий называется среднее число событий за единицу времени. Интенсивность λ может быть как числом постоянным (константой), так и величиной, зависящей от времени *t.* Например, количество пассажиров в городском транспорте в «часы пик» резко увеличивается по сравнению с другим временем суток.

Финальные вероятности состояний

Будем рассматривать марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Пример 1 : Техническое устройство состоит из трёх узлов и в любой момент времени может находиться в одном из восьми состояний (рис. 1).

Возможные состояния устройства таковы:

S_0 — все три узла исправны;

S_1— первый узел неисправен, второй и третий исправны;

S_2 — второй узел неисправен, первый и третий исправны;

S_3 — третий узел неисправен, первый и второй исправны;

S_4 — первый и третий узлы неисправны, второй исправен;

S_5 — второй и третий узлы неисправны, первый исправен;

S_6 — первый и второй узлы неисправны, третий исправен;

S_7 — все три узла неисправны.

Размеченным графом будем считать такой граф, у которого стрелками указаны переходы из одного состояния в другое, а рядом со стрелкой указана интенсивность перехода. Будем различать две интенсивности — прямую λ, и обратную μ.

Тогда λ_1, λ_2 и λ_3 — интенсивности потоков отказов соответственно первого, второго и третьего узлов, а μ_1, μ_2 и μ_3 — соответственно интенсивности потоков возвратов (ремонтов) узлов.

Если для ремонта каждого узла имеется отдельный специалист, то среднее время ремонта каждого узла есть величина постоянная и не имеет значения, один или несколько узлов вышли из строя.

На основе построенного размеченного графа (см. рис. 1) создадим математическую модель.

Наше техническое устройство в соответствии с построенным графом в любой момент времени будет находиться в одном из восьми возможных состояний. Обозначим вероятность каждого *i*-го состояния как $p_i(t)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Для определения вероятности каждого состояния технического устройства составим соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases}
\frac{d_{p_1}(t)}{dt} = \lambda_1\rho_0 + \mu_3 p_4 + \mu_2\rho_6 - (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)p_1 \\
\frac{d_{p_2}(t)}{dt} = \lambda_2\rho_0 + \mu_3 p_5 + \mu_1\rho_6 - (\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_3)p_2 \\
\frac{d_{p_3}(t)}{dt} = \lambda_3\rho_0 + \mu_2 p_5 + \mu_1\rho_4 - (\mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2)p_3; \\
\frac{d_{p_4}(t)}{dt} = \lambda_1\rho_3 + \lambda_3 p_1 + \mu_2\rho_7 - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda_2)p_4; \\
\frac{d_{p_5}(t)}{dt} = \mu_1\rho_7 + \lambda_2 p_3 + \lambda_3\rho_2 - (\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3)p_5; \\
\frac{d_{p_6}(t)}{dt} = \lambda_1\rho_2 + \lambda_2 p_1 + \mu_3\rho_7 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_3)p_6; \\
\frac{d_{p_7}(t)}{dt} = \lambda_1\rho_5 + \lambda_2 p_4 + \lambda_3\rho_6 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)p_7; \\
\frac{d_{p_0}(t)}{dt} = \mu_1\rho_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3\rho_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)p_0.
\end{cases}$$

Эта система дифференциальных уравнений называется **системой уравнений Колмогорова.** Имеем систему из восьми линейных дифференциальных уравнений с восемью неизвестными. Известно, что сумма всех вероятностей равна единице, т. е.

$$p_0 + p_l + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1$$

Таким образом, любое из уравнений, входящее в систему уравнений, можно записать, используя последнее уравнение, и найти значения вероятностей для каждого события.

<u>Для облегчения процесса составления дифференциальных уравнений можно применить следующее правило:</u>

В левой части каждого уравнения следует записать производную вероятности г-го состояния устройства.

В правой части сумма произведений потока событий, входящих в текущее состояние, умноженная на вероятность состояния, из которого исходит поток, минус суммарная интенсивность исходящих потоков событий из текущего состояния, умноженная на вероятность текущего состояния.

Если финальные вероятности существуют: $\lim\limits_{t \to \infty} p_i(t) = p_i$ при $i = 1, 2, 3, \ldots, n$,

то их сумма будет равна единице: $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Финальные вероятности показывают, какое среднее время устройство будет находиться в каждом состоянии. Финальные вероятности находятся из системы дифференциальных уравнений, если их правые части приравнять нулю.

Решение системы уравнений Колмогорова

Зададим численные значения интенсивности потоков событий для примера 1:

$$\lambda_1=1;\ \lambda_2=2;\ \lambda_3=1;\ \mu_1=2;\ \mu_2=4;\ \mu_3=2.$$

Приравняем левые части уравнений системы нулю .

$$\begin{cases}
0 = \lambda_1 p_0 + \mu_3 p_4 + \mu_2 \rho_6 - (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_1; \\
0 = \lambda_2 p_0 + \mu_3 p_5 + \mu_1 \rho_6 - (\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_3) p_2; \\
0 = \lambda_3 p_0 + \mu_2 p_5 + \mu_1 \rho_4 - (\mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2) p_3; \\
0 = \lambda_1 p_3 + \lambda_3 p_1 + \mu_2 \rho_7 - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda_2) p_4; \\
0 = \mu_1 p_7 + \lambda_2 p_3 + \lambda_3 \rho_2 - (\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3) p_5; \\
0 = \lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1 + \mu_3 \rho_7 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_3) p_6; \\
0 = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 \rho_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_0; \\
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_0 = 1.
\end{cases}$$

Второй (отрицательный) член каждого выражения перенесем в левую часть

$$\begin{cases}
p_1(\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1 p_0 + \mu_3 p_4 + \mu_2 \rho_6; \\
p_2(\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_3) = \lambda_2 p_0 + \mu_3 p_5 + \mu_1 \rho_6; \\
p_3(\mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_3 p_0 + \mu_2 p_5 + \mu_1 \rho_4; \\
p_4(\mu_1 + \mu_3 + \lambda_2) = \lambda_1 p_3 + \lambda_3 p_1 + \mu_2 \rho_7; \\
p_5(\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3) = \mu_1 \rho_7 + \lambda_2 \rho_3 + \lambda_3 \rho_2; \\
p_6(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_3) = \lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1 + \mu_3 \rho_7; \\
p_0(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 \rho_3; \\
p_7 = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6.
\end{cases}$$

Подставим конкретные значения (указанные выше) прямых и обратных интенсивностей

$$\begin{cases}
p_1(2 + 2 + 1) = 1p_0 + 2p_4 + 4p_6; \\
p_2(4 + 1 + 1) = 2p_0 + 2p_5 + 2p_6; \\
p_3(2 + 1 + 2) = 1p_0 + 4p_5 + 2p_4; \\
p_4(2 + 2 + 2) = 1p_3 + 1p_4 + 4p_6; \\
p_5(1 + 2 + 4) = 2p_7 + 2p_3 + 1p_2; \\
p_6(2 + 4 + 1) = 1p_2 + 2p_1 + 2p_7; \\
p_0(1 + 2 + 1) = 2p_1 + 4p_2 + 2p_3; \\
p_7 = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6.
\end{cases}$$

После выполнения арифметических действий получим:

$$\begin{cases}
5p_1 = p_0 + 2p_4 + 4p_6; \\
6p_2 = 2p_0 + 2p_5 + 2p_6; \\
5p_3 = p_0 + 4p_5 + 2p_4; \\
6p_4 = p_3 + p_1 + 4p_7; \\
7p_5 = 2p_7 + 2p_3 + p_2; \\
7p_6 = p_2 + 2p_1 + 2p_7; \\
4p_0 = 2p_1 + 4p_2 + 2p_3; \\
p_7 = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6.
\end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $\rho_1 = \frac{1}{5}p_0 + \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{5}p_6$ и подставим его в остальные уравнения:

$$\begin{cases} 6p_2 = 2p_0 + 2p_5 + 2p_6; \\ 5p_3 = p_0 + 4p_5 + 2p_4; \\ \dfrac{28}{5}p_4 = p_3 + 4p_7 + \dfrac{1}{5}p_0 + \dfrac{4}{5}p_6; \\ 7p_5 = p_2 + 2p_3 + 2p_7; \\ \dfrac{27}{2}p_6 = \dfrac{2}{5}p_0 + \dfrac{4}{5}p_4 + p_2 + 2p_7; \\ \dfrac{48}{5}p_0 = \dfrac{4}{5}p_4 + \dfrac{8}{5}p_6 + 4p_2 + 2p_3; \\ p_7 = 1 - \dfrac{6}{5}p_0 - p_2 - p_3 - \dfrac{7}{5}p_4 - p_5 - \dfrac{9}{5}p_6. \end{cases}$$

Аналогично выражаем $\rho_2 = \frac{1}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_5 + \frac{1}{3}p_6$ и подставляем в оставшиеся уравнения и получаем:

$$\begin{cases} 5p_3 = p_0 + 4p_5 + 2p_4; \\ \dfrac{28}{5}p_4 = p_3 + 4p_7 + \dfrac{1}{5}p_0 + \dfrac{4}{5}p_6; \\ \dfrac{20}{3}p_5 = \dfrac{1}{3}p_0 + \dfrac{1}{3}p_6 + 2p_3 + 2p_7; \\ \dfrac{79}{6}p_6 = \dfrac{11}{15}p_0 + \dfrac{4}{5}p_4 + \dfrac{1}{3}p_5 + 2p_7; \\ \dfrac{124}{15}p_0 = 2p_3 + \dfrac{4}{5}p_4 + \dfrac{4}{3}p_5 + \dfrac{44}{15}p_6; \\ p_7 = 1 - \dfrac{23}{15}p_0 - p_2 - p_3 - \dfrac{7}{5}p_4 - \dfrac{4}{3}p_5 - \dfrac{32}{15}p_6. \end{cases}$$

Выражаем $\rho_3 = \frac{1}{5}p_0 + \frac{4}{5}p_5 + \frac{2}{5}p_4$ и подставляем в оставшиеся уравнения и получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{26}{5}p_4 = \dfrac{2}{5}p_0 + \dfrac{4}{5}p_6 + 4p_7 + \dfrac{4}{5}p_5; \\ \dfrac{76}{15}p_5 = \dfrac{11}{15}p_0 + \dfrac{1}{3}p_6 + 2p_7 + \dfrac{4}{5}p_4; \\ \dfrac{79}{6}p_6 = \dfrac{11}{15}p_0 + \dfrac{4}{5}p_4 + \dfrac{1}{3}p_5 + 2p_7; \\ \dfrac{20}{30}p_0 = \dfrac{8}{5}p_4 + \dfrac{44}{15}p_5 + \dfrac{44}{15}p_6; \\ p_7 = 1 - \dfrac{26}{15}p_0 - \dfrac{9}{5}p_4 - \dfrac{32}{15}p_5 - \dfrac{32}{15}p_6. \end{cases}$$

Из первого выражения выразим $\rho_4 = \frac{1}{13}p_0 + \frac{2}{13}p_5 + \frac{2}{13}p_6 + \frac{10}{13}p_7$ и подставим в оставшиеся уравнения. После выполнения преобразований получим:

$$\begin{cases} \dfrac{964}{13*15}p_5 = \dfrac{31}{3*13}p_0 + \dfrac{891}{1*153}p_6 + \dfrac{18}{13}p_7; \\ p_6 = \dfrac{310}{5087}p_0 + \dfrac{178}{5087}p_5 + \dfrac{828}{5087}p_7; \\ p_0 = \dfrac{155}{319}p_5 + \dfrac{155}{319}p_6 + \dfrac{60}{319}p_7; \\ p_7 = \dfrac{13}{11} - \dfrac{73}{93}p_0 - \dfrac{94}{93}p_5 - \dfrac{94}{93}p_6. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим$\rho_5 = \frac{155}{964}p_0 + \frac{89}{964}p_6 + \frac{135}{482}p_7$ и подставим в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} p_6 = \dfrac{54405}{814671} p_0 + \dfrac{1414042}{814671} p_7; \\ p_0 = \dfrac{54405}{94497} p_6 + \dfrac{33230}{94497} p_7; \\ p_7 = \dfrac{6266}{19172} - \dfrac{42471}{57516} p_0 - \dfrac{49491}{57516} p_6. \end{cases}$$

Из первого уравнения ρ_6 в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{17372453670}{37012030731} p_7; \\ p_7 = 0{,}2845 - 0{,}6927 p_0. \end{cases}$$

Из первого уравнения p_0 подставим в оставшиеся уравнения:

$p_7 = 0{,}2845 + 0{,}6927 * 0{,}4697 p_7$ $\quad p_7 = \frac{0{,}2845}{1{,}3254} = 0{,}2146.$Equation.3

Определим остальные вероятности, подставляя полученные результаты в обратном порядке

P_0= 0,46940 *0,21146=0,1007;

P_6 =0,06678 *0,107 +0,1731 *0,2146=0,04387;

P_5= 0,1608*0,1007+0,09232*0,04387+0,2801*0,2146=0,08035;

P_4=0,07692*0,1007+0,1538*0,08035+0,1538*0,04387+0,7692*0,2146=0,08035;

P_3=0,2*0,1007+0,8*0,080035+0,4*0,1853=0,1585;

P_2=0,3333*0,1007+0,3333*0,08035+0,3333*0,04387=0,07498;

P_1=0,2*0,1007+0,4*0,1853+0,8*0,04387=0,1294.

Выполним проверку. Сумма вероятностей всех событий должна быть равна единице.

$p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7=1$

0,1294+0,07498+0,1585+0,1853+0,08035+0,043870+0,04387+0,1007+0,2146=0,9877

Полученный результат меньше единицы, так как значение каждой вероятности было округленно.

СМО. Основные понятия.

С системами массового обслуживания (СМО) приходится сталкиваться очень часто. Это и работа телефонной станции, и различные очереди (на автозаправке, в поликлинике, в билетной кассе и т.д.), работа некоторых организаций (магазины, мастерские, парикмахерские и т. д.).

Каждая СМО имеет как минимум три элемента: обслуживающий инструмент (станок, касса, канал связи и т. д.), который в дальнейшем будем называть каналом обслуживания или просто *каналом; входной поток,* т.е. поток заявок, поступающих на обслуживание; *выходной поток,* т.е. заявки, выполненные СМО (обеспеченные услугой).

Каждая поступившая заявка и принятая на обслуживание внутри СМО обрабатывается некоторое время, называемое *временем обслуживания* — $t_{об}$. Все заявки поступают случайным образом и независимо друг от друга. Будем рассматривать простейший случай: в каждый момент времени может поступить только одна заявка. Случаи поступления двух и более заявок в один и тот же момент времени не рассматриваются. Таким образом, в некоторые моменты времени поступившие заявки будут скапливаться на входе СМО и ожидать своей обработки либо покидать СМО необслуженными. В другие моменты времени СМО может простаивать, т. е. не иметь заявок на обслуживание.

График работы СМО представляет собой ступенчатую функцию, т. е. состояние СМО изменяется скачкообразно.

При моделировании работы СМО ставится задача связать технические характеристики СМО,

По способу функционирования СМО могут быть:

- открытыми, т. е. поток заявок не зависит от внутреннего состояния СМО;

• закрытыми, т.е. входной поток зависит от состояния СМО (один ремонтный рабочий обслуживает все каналы по мере их выхода из строя).

Одноканальные СМО с отказами

При изучении СМО используем следующие предположения:

1. Входной поток является пуассоновским с параметром λ.
2. Время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону с параметром λ: INCLUDEPICTURE "http://do.rksi.ru/library/courses/mm/tem3_4-2.gif" * MERGEFORMATINET
3. Время обслуживания требования не зависит от количества требований, поступивших в систему.

Такая система в любой момент времени t может находиться в одном из двух состояний:

E_0 – в системе 0 требований (система свободна);

E_1 – в системе 1 требование (система занята).

Далее мы будем находить вероятности:

P_0 – система находится в состоянии E_0;

P_1 – система находится в состоянии E_1.

Начиная с некоторого момента времени, вероятность $P_0(t)$ перестает зависеть от времени и становится постоянной; постоянной будет и $P_1(t)$. Эти величины равны соответственно

$P_0 = \mu/\lambda+\mu$, $P_1 = 1\text{-}P_0 = \lambda/\lambda+\mu$.

В таких случаях говорят, что в системе установился стационарный режим работы. Будем находить коэффициент загрузки системы по формуле

$\varphi = P_1/P_0 = \lambda/\mu$.

Напомним, что λ – среднее число требований, прибывающих в систему за единицу времени, μ – среднее число обслуженных требований.

Вероятности застать систему свободной и застать её занятой, соответственно равны теперь

$P_0 = \mu/(\lambda+\mu) = 1/(\lambda/\mu\text{-}1) = 1/(\varphi+1)$, $P_1 = \varphi/(\varphi+1)$.

Ясно, что чем больше коэффициент загрузки, тем больше вероятность отказа системы. Это не выгодно потребителю (но выгодно организатору системы, ибо мала вероятность простоя P_0). Если уменьшить коэффициент загрузки, то уменьшится вероятность отказа СМО (это выгодно потребителю), но увеличится вероятность простоя (что не выгодно организаторам системы). Мы имеем дело с противоположными тенденциями и, следовательно, необходимо решать задачи оптимизации режима работы СМО.

Одноканальные СМО с ожиданием

Такие системы при условии, что нет ограничений на длину очереди, имеют бесчисленное множество состояний:

$E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$

E_0 – в системе 0 требований (система свободна);

E_1 – в системе 1 требование (система занята);

E_2 – в системе 1 требование, и одно требование ожидает в очереди;

E_3 – в системе 1 требование, и два требования ожидают в очереди и т. д.

Для нахождения вероятностей используется следующая формула:

$P_0 = 1-\varphi$, $\varphi = \lambda/\mu$.

Следовательно,

$P_k = (1-\varphi)\varphi^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Условие $\varphi > 0$ является необходимым и достаточным для наличия стационарного режима работы системы.

Интересно знать, почему стационарный режим существует только при этом условии?

Это условие означает, что среднее число требований, поступивших в СМО, меньше, чем интенсивность самого обслуживания; поэтому система успевает ритмично работать. Теперь ясно, почему система не может работать при условии, когда коэффициент загрузки больше 1. Но почему нет установившегося режима, когда коэффициент загрузки равен 1? Ведь в этом случае, сколько в среднем требований поступает в СМО, столько в среднем и обслуживается. Однако требования поступают в систему неравномерно, и время их обслуживания тоже колеблется, так что могут быть и простои, и перегрузки. Вот поэтому при таком условии не поддерживается стационарный режим.

Подсчет средних характеристик

При изучении СМО важнейшими являются средние значения (математические ожидания) таких случайных величин:

n – количество требований, находящихся в системе;

v – длина очереди;

w – время ожидания в очереди.

Ниже их формулы:

$n = \varphi/(1-\varphi)$;

$v = \varphi^2/(1-\varphi)$;

$w = [\varphi/(1-\varphi)]*[1/\mu]$.

Пример

Интенсивность потока автомобилей, поступающих на моечную станцию (одноканальная СМО) – 4 автомобиля в час, а интенсивность обслуживания – 5 автомобилей в час. Предполагая, что станция работает в стационарном режиме, найти среднее число автомобилей, находящихся на станции, среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания.

Решение

Определяем коэффициент загрузки системы:

$\varphi = \lambda/\mu = 0{,}8$.

Далее, используя изученные выше формулы, вычисляем все требуемые характеристики:

$n = 0{,}8/(1-0{,}8) = 4$;

$v = 4*0{,}8 = 3{,}2$;

$w = 4/5 = 0{,}8$.

Многоканальные СМО с отказами

Сделаем следующие предположения относительно таких систем:

- входной поток пуассоновский;
- время обслуживания распределено по экспоненциальному закону;
- время обслуживания не зависит от входного потока;
- все линии обслуживания работают независимо.

Будем считать, что система содержит некоторое количество линий обслуживания s. Она может находиться в состояниях E_0, E_1, E_2, E_3, ... E_S. Расчёт переходных вероятностей показывает, что из каждого из свободных состояний система может переходить в соседнее состояние, либо в такое же, в каком была.

Для нахождения вероятностей используется следующая формула:

$P_k = \varphi^k/k!*P_0$, $\varphi = \lambda/\mu$, где k = 1, 2, ...

Так как сумма всех вероятностей составляет 1, то INCLUDEPICTURE "http://do.rksi.ru/library/courses/mm/tem3_4-3.gif" * MERGEFORMATINET

Отсюда следуют формулы:

INCLUDEPICTURE "http://do.rksi.ru/library/courses/mm/tem3_4-4.gif" * MERGEFORMATINET INCLUDEPICTURE "http://do.rksi.ru/library/courses/mm/tem3_4-5.gif" * MERGEFORMATINET

Увеличение коэффициента загрузки системы ведет к увеличению вероятности отказа системы. Это не устраивает потребителей. Уменьшение вероятности отказа системы может быть достигнуто за счёт увеличения количества линий обслуживания.

Однако резкое увеличение количества линий не устраивает организатора, потому что ведёт к дополнительным затратам на приобретение новых линий обслуживания, и увеличивает вероятность простоя линий. Расчет показывает, что среднее число свободных линий обслуживания

$\rho = s-\varphi(1-P_s)$.

Теперь ясно, что при сильном увеличении количества линий обслуживания, увеличится среднее число простаивающих линий.

Таким образом, мы имеем дело с двумя противоположными тенденциями. Задача сводится к выбору оптимального варианта. С этой целью будем минимизировать функцию стоимости СМО – C(s). Если через c_1 мы обозначим стоимость одного отказа (организатор системы платит штраф за каждый отказ), а через c_2 – стоимость простоя одной линии за единицу времени, то функция стоимости будет иметь следующий вид:

$C(s) = c_1\lambda P_s+c_2\rho$.

Или в развернутом виде:

INCLUDEPICTURE "http://do.rksi.ru/library/courses/mm/tem3_4-6.gif" * MERGEFORMATINET

Сначала с увеличением s она убывает, а затем растёт. Наша задача состоит в том, чтобы найти её минимум.

Пример: Какое оптимальное число линий обслуживания должна иметь СМО, если известно, что

$\lambda = 2$, $\mu = 1$, $c_1 = 5$, $c_2 = 1$.

Решение

$\varphi = \lambda/\mu = 2$,

$C(s) = 5*2*2^s/s!(1+2+4/2!+\ldots+2^s/s!)+1*(s-2(1-P_s))$,

$P_1 = \varphi/(1+\varphi) =2/3$,

$C(1) = 5*2*2/1(1+2)+1(1-2(1-2/3)) = 7$.

Аналогично имеем:

C(2) = 4,8; C(3) = 3,5; C(4) = 3,1; C(5) = 3,44.

Таким образом, минимум функции стоимости достигается при s = 4, т. е. оптимальное число линий обслуживания – 4.

Многоканальные СМО с ожиданием

Предположения относительно систем, введенные ранее, остаются в силе. Изучение системы ведется по обычной схеме:

1. Выясняются возможные состояния системы (здесь их бесконечное множество).
2. Находятся переменные вероятности.
3. Составляется система уравнений для нахождения P_k – вероятностей пребывания системы в каждом из своих состояний.
4. Изучаем стационарный режим работы СМО.
5. Находятся все вероятности, через P_0. Результат таков:

INCLUDEPICTURE "http://do.rksi.ru/library/courses/mm/tem3_4-7.gif" * MERGEFORMATINET

1. Ведётся подсчет средних характеристик: j – среднее количество занятых линий; q – среднее число свободных линий; P(w > 0) – вероятность ожидания; v – средняя длина очереди.

$j = \varphi$; $q = s-\varphi$;

$P(w > 0) = \varphi^s{*}P_0/s!(1-\varphi/s)$; $v = \varphi^{s+1}P_0/(s-1)!(s-\varphi)^2$.

Пример: Определить число взлетно-посадочных полос для самолётов с учетом требования, что вероятность ожидания P(w > 0) должна быть меньше, чем 0,05. Интенсивность потока равна 27 требований в сутки и интенсивность линий обслуживания – 30 самолётов в сутки.

Решение

$\varphi = \lambda/\mu = 0{,}9$.

Используя приведенные выше формулы, имеем:

s = 1: $P_0 = (1+0{,}9+0{,}81/(1(1-0{,}9)))^{-1} = 0{,}1$, P(w > 0) = 0,9*0,1/(1-0,9) = 0,9;

s = 2: P_0 = 0,380, P(w > 0) = 0,276;

s = 3: P_0 = 0,403, P(w > 0) = 0,07;

s = 4: P_0 = 0,456, P(w > 0) = 0,015.

Таким образом, надо устраивать 4 взлетно-посадочные полосы.

Практическая работа 8. Нахождение характеристик простейших систем массового обслуживания. Решение задач массового обслуживания методами имитационного моделирования»

Методические указания к выполнению задания

Суть имитационного моделирования

Имитационное моделирование – получение экспериментальной информации о сложном объекте, которая не может быть получена иным путем, как экспериментируя с его моделью на ПЭВМ.

Как остроумно подметил Ю. Адлер, сочетание слов имитация и моделирование недопустимо и является тавтологией. Но, рассматривая исторический процесс формирования этого термина, пришли к выводу, что это словосочетание определяет в моделировании такую область, которая *относится к получению экспериментальной информации о сложном объекте, которая не может быть получена иным путем, как экспериментируя с его моделью на ПЭВМ*.

Имитационный объект имеет вероятностный характер функционирования. Для исследователя представляют интерес выводы, носящие характер статистических показателей, оформленных, может быть, даже в виде графиков или таблиц, в которых каждому варианту исследуемых параметров поставлены в соответствие определенные средние значения с набором характеристик их распределения, без получения зависимости в аналитическом виде.

Эта особенность является и достоинством, и одновременно, недостатком имитационным моделей. **Достоинство** в том, что резко расширяется класс изучаемых объектов, а **недостаток** – в отсутствии простого управляющего выражения, позволяющего прогнозировать результат повторного эксперимента. Но в реальной жизни также невозможно для сколько-нибудь сложного объекта получить точное значение экономического показателя, а только лишь его ожидаемое значение с возможными отклонениями.

Главной функцией имитационной модели является воспроизведение с заданной степенью точности прогнозируемых параметров её функционирования, представляющих исследовательский интерес. Как объект, так и его модель, должны обладать системными признаками.

Функционирование объекта характеризуется значительным числом параметров. Особое место среди них занимает временной фактор. В большинстве моделей имеется возможность масштабирования или введения машинного времени, т. е. интервала, в котором остальные параметры системы сохраняют свои значения или заменяются некоторыми обобщенными величинами. Таким образом, за счет этих двух процессов – укрупнения единицы временного интервала и расчета событий этого интервала за зависящий от мощности ПЭВМ временной промежуток – и создается возможность прогноза и расчета вариантов управленческих действий.

Метод Монте-Карло

Неопределённость в предыдущих темах была стохастической. Поэтому строили аналитическую математическую модель и требовали, чтобы в данных задачах, рассматриваемые процессы были марковскими. На практике это не всегда выполняется и тогда требуется использовать методы имитационного моделирования. Что это такое рассказывалось в предыдущем параграфе, а теперь поговорим о самих методах имитационного моделирования.

Метод Монте-Карло является методом статистического моделирования или имитационного моделирования.

Метод Монте-Карло – это численный метод решения задач при помощи моделирования случайных величин.

Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1948 г. Создателями метода считают математиков Дж. Неймана и С. Улама.

Теоретическая основа метода была известна давно. Однако до появления ЭВМ этот метод не мог найти широкого применения.

Само название метода происходит от названия города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своими игорными домами. Дело в том, что одним из простейших механических приборов для получения случайных величин является рулетка. Возникает вопрос: помогает ли метод Монте-Карло выигрывать в рулетку? Нет, не помогает. И даже не занимается этим.

Идея метода чрезвычайно проста и состоит в следующем.

Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата, проводится розыгрыш случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат. Реализация случайного процесса каждый раз складывается по-разному, т. е. мы получаем различные исходы рассматриваемого процесса. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки можно получить: вероятность события, математическое ожидание и т. д.

При помощи метода Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он является тогда, когда процедура розыгрыша проще, а не сложнее аналитического расчета.

Оценка надежности простейших систем методом Монте-Карло

Пример: Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Система оказывает при отказе хотя бы одного блока. Первый блок содержит два элемента: А, В (они соединены параллельно) и оказывает при одновременном отказе обоих элементов. Второй содержит один элемент С и отказывает при отказе этого элемента.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности (вероятности безотказной работы) системы, зная вероятности безотказной работы элементов: Р (А)=0,8, Р (В)=0,85, Р (С)=0,6; б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где Р- надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 50 испытаний.

Решение. а) Выбираем из таблицы приложения (*равномерно распределенные числа)* три случайных числа: 0,10, 0,09 и 0,73; по правилу $^{*)}$ (*если случайное число меньше вероятности события, то событие наступило; если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило*) разыграем события А, В, С, состоящие в безотказной работе соответственно элементов А, В, С. Результаты испытания будем записывать в расчетную таблицу .

Поскольку Р (А)=0,8 и 0,10 <0,8, то событие наступило, т.е. элемент А в этом испытании работает безотказно. Так как Р (В)=0,85 и 0,09< 0,85, то событие В наступило, т.е. элемент В работает безотказно.

Таким образом, оба элемента первого блока работают; следовательно, работает и сам первый блок. В соответствующих клетках табл. ставим знак плюс.

Таблица

Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе				
					элементов			блоков	системы
		A	B	C	A	B	C		
1	Первый	0,10	0,09		+	+		+	-
	Второй			0,73			-	-	
2	Первый	0,25	0,33		+	+		+	-
	Второй			0,76			-	-	
3	Первый	0,52	0,01		+	+		+	+
	Второй			0,35			+	+	
4	Первый	0,86	0,34		-	+		+	-
	Второй			0,67			-	-	

Так как Р (С)=0,6 и 0,73< 0,6, то событие С не наступило, т.е. элемент с получает отказ; Другими словами, второй блок, а значит и вся система, получают отказ. В соответствующих клетках табл. 57 ставим минус.

Аналогично разыгрываются и остальные испытания. В табл. приведены результаты четырех испытаний.

Произведя 50 испытаний, получим, что в 28 из них система работала безотказно. В качестве оценки искомой надежности Р примем относительную частоту $P^*=28/50=0,56$.

б) Найдем надежность системы Р аналитически. Вероятности безотказной работы первого и второго блоков соответственно равны:

$P_1 = 1 - P(\bar{A}) * P(\bar{B}) = 1 - 0.2 * 0.15 = 0.97, P_A = P(C) = 0.6$

Вероятность безотказной работы системы

$$P=P_1*P_2=0{,}97*0{,}6=0{,}582$$

Искомая абсолютная погрешность $|P-P^*|$ =0,582-0,56=0,022.

Расчет СМО с отказами методом Монте-Карло

Пример: В трехканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau)=5e^{-5\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время T=4 мин.

Решение:

Пусть T_1=0- момент поступления первой заявки. Заявка поступит в первый канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания первой заявки T_1+0,5=0+0,5=0,5. В счетчик обслуженных заявок записываем единицу.

Моменты поступления последующих заявок найдем по формуле

$T_\iota= T_{\iota-1}+ \tau_\iota$,

где τ_ι - длительность времени между двумя последовательными заявками с номерами ι-1 и ι.

Возможные $\tau_\iota = - (1/\lambda) \ln r_{i} = (1/\lambda)(- \ln r_i)$.

Учитывая, что, по условию, λ=5, получим $\tau_\iota =0{,}2 (- \ln r_i)$.

Случайные числа r_i берем из таблицы приложения, начиная с первой строки сверху. Для нахождения времени между поступлениями первой и второй заявок возьмем случайное число r=0,10.

Тогда τ_2=0,2*(-ln 0,10)=0,2*2,30=0,460. Первая заявка поступила в момент T_1=0.

Следовательно, вторая заявка поступила в момент T_2= T_1+0,4600+0,460=0,460. В этот момент первый канал еще занят обслуживанием первой заявки, поэтому вторая заявка поступит во второй и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания второй заявки T_2+05=0,460+0.5=0.960 . В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

По очередному случайному числу r=0.09 разыграем время τ_3 между поступлениями второй и третьей заявок:

$$\tau_3=0{,}2(-\ln 0{,}09)=0{,}2*2{,}41=0{,}482.$$

Вторая заявка поступила в момент T_2= 0,460 . Поэтому третья заявка поступила в момент T_3= T_2+0,482=0,460+0,482=0,942. В этот момент первый канал уже свободен и третья заявка поступит в первый канал. Момент окончания обслуживания третьей заявки T_3+0,5=0,942+0,5=1,442.В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

Дальнейший расчет производят аналогично (табл. 59), причем если момент поступления заявки все каналы заняты (момент поступления заявки меньше каждого из моментов окончания обслуживания), то в счетчик отказов добавляют единицу.

Заметим, что обслуживание 20-й заявки закончится в момент 4 148,>4, поэтому эта заявка получает отказ.

Испытание прекращают (в таблице записывают «стоп»), если момент поступления заявки T>4.

Таблица

номер заявки i	Случайное число r_i	$-\ln r_i$	Время между двумя последовательными заявками $\tau_i=0,2(-\ln r_i)$	Момент поступления заявки $T_i=T_{i-1}+\tau_i$	Момент $T_i+0,5$ окончания обслуживания заявки каналом			Счетчик	
					1	2	3	Обслуженных заявок	отказов
1				0	0,500			1	
2	0,10	2,30	0,460	0,460		0,960		1	
3	0,09	2,41	0,482	0,942	1,442			1	
4	0,73	0,32	0,064	1,006		1,506		1	
5	0,25	1,39	0,278	1,284			1,784	1	
6	0,33	1,11	0,222	1,506	2,006			1	
7	0,76	0,27	0,054	1,560		2,060		1	
8	0,52	0,65	0,130	1,690					1
9	0,01	4,60	0,920	2,610	3,110			1	
10	0,35	1,05	0,210	2,820		3,320		1	
11	0,86	0,15	0,030	2,850			3,350	1	
12	0,34	1,08	0,216	3,066					1
13	0,67	0,40	0,080	3,146	3,646			1	
14	0,35	1,05	0,210	3,356		3,856		1	
15	0,48	0,73	0,146	3,502			4,002		1
16	0,76	0,27	0,054	3,556					1
17	0,80	0,22	0,044	3,600					1
18	0,95	0,05	0,010	3,610					1
19	0,90	00,10	0,020	3,630					1
20	0,91	0,09	0,018	3,648	4,148				1
21	0,17	1,77	0,354	4,002					
				(стоп)			итого	$X_1=12$	8

Из таблицы находим, что за 4 мин всего поступило 20 заявок; обслужено $x_1=12$.

Выполним аналогично еще пять испытаний, получим $x_2=15$, $x_3=14$, $x_4=12$, $x_5=13$, $x_6=15$.

В качестве оценки искомого математического ожидания а числа обслуженных заявок примем выборочную среднюю

$$a^*=\bar{x}=(2*12+13+14+2*15)/6=13,5.$$

Задание 1.

Вариант 1

1. Техническое устройство состоит из трёх узлов и в любой момент времени может находиться в одном из восьми состояний (рис. 1).Численные значения интенсивности потоков событий: $\lambda_1=2$; $\lambda_2=2$; $\lambda_3=1$; $\mu_1=4$; $\mu_2=4$; $\mu_3=2$. Найдите финальные вероятности сосотояний устройства.
2. Интенсивность потока автомобилей, поступающих на моечную станцию (одноканальная СМО) – 5 автомобиля в час, а интенсивность обслуживания – 6 автомобилей в час. Предполагая, что станция работает в стационарном режиме,

найти среднее число автомобилей, находящихся на станции, среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания.

3. Какое оптимальное число линий обслуживания должна иметь СМО, если $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $c_1 = 4$, $c_2 = 2$.
4. Определить число взлетно-посадочных полос для самолётов с учетом требования, что вероятность ожидания $P(w > 0)$ должна быть меньше, чем 0,06. Интенсивность потока равна 28 требований в сутки и интенсивность линий обслуживания – 32 самолётов в сутки.

Вариант 2

1. Техническое устройство состоит из трёх узлов и в любой момент времени может находиться в одном из восьми состояний (рис. 1).Численные значения интенсивности потоков событий: $\lambda_1=2$; $\lambda_2=1$; $\lambda_3=1$; $\mu_1=4$; $\mu_2=2$; $\mu_3=2$. Найдите финальные вероятности сосотояний устройства.
2. Интенсивность потока автомобилей, поступающих на моечную станцию (одноканальная СМО) – 6 автомобиля в час, а интенсивность обслуживания – 7 автомобилей в час. Предполагая, что станция работает в стационарном режиме, найти среднее число автомобилей, находящихся на станции, среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания.
3. Какое оптимальное число линий обслуживания должна иметь СМО, если $\lambda = 4$, $\mu = 2$, $c_1 = 5$, $c_2 = 2$.
4. Определить число взлетно-посадочных полос для самолётов с учетом требования, что вероятность ожидания $P(w > 0)$ должна быть меньше, чем 0,06. Интенсивность потока равна 30 требований в сутки и интенсивность линий обслуживания – 34 самолётов в сутки.

Вариант 3

1. Техническое устройство состоит из трёх узлов и в любой момент времени может находиться в одном из восьми состояний (рис. 1).Численные значения интенсивности потоков событий: $\lambda_1=1$; $\lambda_2=2$; $\lambda_3=2$; $\mu_1=4$; $\mu_2=4$; $\mu_3=4$. Найдите финальные вероятности сосотояний устройства.
2. Интенсивность потока автомобилей, поступающих на моечную станцию (одноканальная СМО) – 4 автомобиля в час, а интенсивность обслуживания – 5 автомобилей в час. Предполагая, что станция работает в стационарном режиме, найти среднее число автомобилей, находящихся на станции, среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания.
3. Какое оптимальное число линий обслуживания должна иметь СМО, если $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 2$.
4. Определить число взлетно-посадочных полос для самолётов с учетом требования, что вероятность ожидания $P(w > 0)$ должна быть меньше, чем 0,08. Интенсивность потока равна 28 требований в сутки и интенсивность линий обслуживания – 32 самолётов в сутки.

Вариант 4

1. Техническое устройство состоит из трёх узлов и в любой момент времени может находиться в одном из восьми состояний (рис. 1).Численные значения интенсивности потоков событий: $\lambda_1=2$; $\lambda_2=2$; $\lambda_3=2$; $\mu_1=2$; $\mu_2=2$; $\mu_3=4$. Найдите финальные вероятности сосотояний устройства.

2. Интенсивность потока автомобилей, поступающих на моечную станцию (одноканальная СМО) – 8 автомобиля в час, а интенсивность обслуживания – 9 автомобилей в час. Предполагая, что станция работает в стационарном режиме, найти среднее число автомобилей, находящихся на станции, среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания.
3. Какое оптимальное число линий обслуживания должна иметь СМО, если $\lambda = 7$, $\mu = 8$, $c_1 = 4$, $c_2 = 2$.
4. Определить число взлетно-посадочных полос для самолётов с учетом требования, что вероятность ожидания $P(w > 0)$ должна быть меньше, чем 0,06. Интенсивность потока равна 18 требований в сутки и интенсивность линий обслуживания – 22 самолётов в сутки.

Задание 2

Вариант 1

1. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит три элемента: A, B, C, а второй- два элемента: D, E. Элементы каждого блока соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0,8; P(B)=0,9; P(C)=0,85; P(D)=0,7; P(E)=0,6;

б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где P- надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 15 испытаний.

2. В двухканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau)=4e^{-4\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время T=8 мин.

Вариант 2

1. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит два элемента: A, B, второй- три элемента: C, D, E. Элементы первого и второго блоков соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0,8; P(B)=0,9; P(C)=0,7; P(D)=0,75; P(E)=0,8;

б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где P - надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 15 испытаний.

2. В трехканальную СМО с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между моментами поступления двух последовательных заявок распределено по закону $f(\tau)=0{,}8e^{-0{,}8\tau}$; время обслуживания заявок 1,5 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время T=10мин.

Вариант 3

1. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит три элемента: A, B, C, а второй- два элемента: D, E. Элементы каждого блока соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0,9; P(B)=0,5; P(C)=0,95; P(D)=0,8; P(E)=0,7;

б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где P- надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 15 испытаний.

2. В двухканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau)=5e^{-5\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1,5 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время T=10 мин.

Вариант 4

1. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит два элемента: A, B, второй- три элемента: C, D, E. Элементы первого и второго блоков соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку P^* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: P(A)=0,8; P(B)=0,7; P(C)=0,8; P(D)=0,85; P(E)=0,6;
б) найти абсолютную погрешность $|P-P^*|$, где P - надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 15 испытаний.

2. В трехканальную СМО с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между моментами поступления двух последовательных заявок распределено по закону $f(\tau)=8\ e^{-8\tau}$; время обслуживания заявок 1мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время T=8 мин.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение марковскому процессу.
2. Какие типы неопределенностей встречаются.
3. Дайте определение потоку событий.
4. Как составить уравнения Колмогорова.
5. Какие виды СМО Вы знаете?
6. При каких предположениях изучаются одноканальные СМО с отказами?
7. Почему стационарный режим в одноканальных СМО с ожиданием существует только при условии $\varphi > 0$?
8. Какие средние характеристики можно рассчитать в одноканальных СМО с ожиданием?
9. В чем заключается суть имитационного моделирования?
10. В чем заключаются достоинства и недостатки такого типа моделирования?
11. Как применяется метод Монте-Карло?
12. Какие способы получения случайных величин Вы знаете?

Практическая работа 9 «Моделирование прогноза. Построение прогнозов»

Цель работы:
1. Научиться применять МНК для линейного сглаживания данные.
2. Научиться сглаживать данные с помощью квадратичной функции.

Методические указания к выполнению задания 1.

Метод наименьших квадратов — один из методов регрессионного анализа для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки.

Метод наименьших квадратов применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

Метод наименьших квадратов предусматривает нахождение параметров функциональной зависимости из условия минимума суммы квадратов отклонений.

1. Если $f(x)$ - линейная функция, т.е. $y = ax + b$, то $S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$, неизвестные параметры $a,\ b$ определяются из системы

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + nb = \sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \quad (1)$$

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название ***эмпирических формул***.

Система (1) называется ***системой нормальных уравнений***.

2. Если $f(x)$ - квадратичная функция, т.е. $y = ax^2 + bx + c$, то $S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$, неизвестные параметры $a,\ b,\ c$ определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i + nc = \sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \quad (2)$$

Пример 1.

С помощью МНК подобрать параметры a и b линейной функции $y = ax + b$, приближенно описывающей следующие опытные данные.

Построить полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10	13,2

Решение:

Параметры a и b искомой функции найдем из системы нормальных уравнений. Для этого перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Для решения задачи составим таблицу.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \times y_i$
1	0	2,9	0	0
2	1,0	6,3	1	6,3
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21
5	3,0	13,2	9,0	39,6
$\sum$	7,6	40,3	16,66	78,75

Тогда система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 16{,}66a + 7{,}6b = 78{,}75 \\ 7{,}6a + 5b = 40{,}3 \end{cases}.$$

Решим систему.

Для этого выразим b из второго уравнения:

$5b = 40{,}3 - 7{,}6$

$b = (40{,}3 - 7{,}6)/5$

Подставим в первое уравнение:

$$16{,}66\text{a} + \frac{7{,}6}{5}(40{,}3 - 7{,}6\text{a}) = 78{,}75$$

$16{,}66a + 61{,}25b - 11{,}552a = 78{,}75$

$5{,}108a = 17{,}494$

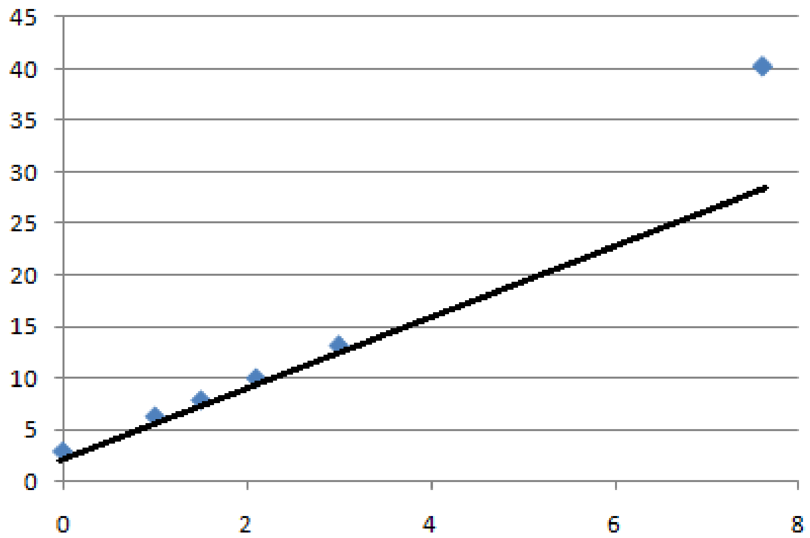
$a = 3{,}42$.

Отсюда $\text{b} = \frac{40{,}3 - 7{,}6 \cdot 3{,}42}{5} = 2{,}86.$

Итак, $a = 3{,}42$, $b = 2{,}86$, и, следовательно, искомая функция имеет вид:

$$y = 3{,}42x + 2{,}86.$$

Построим полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.



Вывод:

Так как исходные данные и полученная прямая расположены близко друг к другу, то аппроксимирующая функция найдена правильно.

Задание 1. С помощью МНК подобрать параметры a и b линейной функции $y = ax + b$, приближенно описывающей следующие опытные данные. Построить полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.

вариант							
1	x_i	1	3	4	5	6	8
	y_i	6	4	4	2	3	2
2	x_i	2	3	4	5	7	8
	y_i	1	3	4	6	6	9
3	x_i	1	2	4	6	7	8
	y_i	7	6	4	5	3	3
4	x_i	2	3	4	5	7	8
	y_i	2	6	6	7	8	10

Задание 2. С помощью МНК подобрать параметры a и b квадратичной функции $y = a^2x + bx + c$, приближенно описывающей следующие опытные данные. Построить полученную линию и исходные точки в одной системе координат.

вариант							
1	x_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	y_i	4,2	2,5	6,2	7,5	2,6	1
2	x_i	1	1,5	2	2,6	2,9	3,1
	y_i	2,6	5,6	4,3	1,6	2,6	3,4

3	x_i	2	3	3,6	3,8	4,2	4,6
	y_i	0	2,3	2,5	2,9	1	4,5
4	x_i	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	y_i	4,5	4,6	8,5	2,6	4,5	6,7

Контрольные вопросы:

1. Какова общая постановка задачи нахождения эмпирических формул?
2. Каким образом можно оценивать качество приближения?
3. Каким образом графически можно интерпретировать постановку задачи нахождения эмпирических формул?
4. В чем сходство и различие постановки задачи метода наименьших квадратов и задачи интерполяции?
5. Какие виды приближающих функций обычно применяются?
6. В чем суть метода приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов линейной функцией?
7. Как сводится задача построения различных эмпирических формул к задаче нахождения линейной функции?

Практическая работа 10 «Решение матричной игры методом итераций».

Цель работы

Изучить приближенный метод решения матричной игры.

Постановка задачи

Решить матричную игру методом фиктивного розыгрыша Брауна–Робинсона.

На первом шаге противники выбирают произвольные чистые стратегии и соответственно. Пусть противниками на первых N шагах последовательно выбирались стратегии (i_1, i_2,…,i_N) и (j_1, j_2,…,j_N) и x_i^N, y_i^N - количество шагов, на которых первым и вторым игроками выбирались стратегии i и j соответственно. Очевидно, $\sum_{i=1}^{m} x_i^N = \sum_{j=1}^{n} y_j^N = N$. Обозначим относительные частоты применения стратегий i и j через $p_i^N= x_i^N/N$, $q_j^N= y_j^N/N$. Таким образом, на каждом шаге N имеем наблюдаемые смешанные стратегии $p^N=(p_1^N,\dots, p_m^N)$ и $q^N=(q_1^N,\dots, q_n^N)$. Эти векторы определяют эмпирическое распределение стратегий после первых N шагов. На шаге (N + 1) выбираются такие чистые стратегии i_{N+1} и j_{N+1}, что

$$\alpha^N = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^N = \sum_{j=1}^{n} a_{i_{N+1}j} q_j^N$$

$$\beta^N = \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^N = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_{N+1}} p_i^N .$$

Частоты стратегий пересчитываются по следующим формулам:

$$p_i^{N+1} = \begin{cases} \dfrac{Np_i^N}{N+1}, & i \ne i_{N+1} \\ \dfrac{Np_i^N+1}{N+1}, & i = i_{N+1} \end{cases}, \quad q_j^{N+1} = \begin{cases} \dfrac{Nq_j^N}{N+1}, & j \ne j_{N+1} \\ \dfrac{Nq_j^N+1}{N+1}, & j = j_{N+1} \end{cases}.$$

Авторами метода доказано, что с ростом N эмпирические распределения сходятся к оптимальным смешанным стратегиям:

$p^N \to p^*$, $q^N \to q^*$, $v^N=(\alpha^N+\beta^N)/2 \to v$.

Метод прост в описании и реализации, сложность одной итерации составляет O(n+m). Недостатком метода является его медленная немонотонная сходимость. На практике остановка алгоритма происходит после выполнения достаточно большого числа итераций.

Пример. Выполнить 12 итераций метода Брауна−Робинсона для решения матричной игры с платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение. Запишем изменение эмпирических распределений на каждом шаге алгоритма.

Шаг 1. $i_1=1$, $j_1=1 \to p^1=(1, 0, 0)$, $q^1=(1, 0, 0)$.

Шаг 2. $\alpha^1=3$, $i_2=1$, $p^2=(1/2, 0, 1/2)$, $\beta^1=1$, $j_2=3$, $q^2=(1, 0, 0)$, $v^1=(\alpha^1+\beta^1)/2=2$

Шаг 3. $\alpha^2=3$, $i_3=3$, $p^3=(1/3, 0, 2/3)$, $\beta^2=3/2$, $j_2=3$, $q^3=(2/3, 0, 1/3)$, $v^2=(\alpha^2+\beta^2)/2=9/4$

Шаг 4. $\alpha^3=7/3$, $i_4=3$, $p^4=(1/4, 0, 3/4)$, $\beta^3=4/3$, $j_4=3$, $q^4=(1/2, 0, 1/2)$, $v^3=(\alpha^3+\beta^3)/2=11/6$

Шаг 5. $\alpha^4=5/2$, $i_5=2$, $p^5=(1/5, 1/5, 3/5)$, $\beta^4=5/4$, $j_5=3$, $q^5=(1/3, 0, 2/3)$, $v^4=(\alpha^4+\beta^4)/2=1{,}875$

Шаг 6. $\alpha^5=8/3$, $i_6=2$, $p^6=(1/6, 2/6, 1/2)$, $\beta^5=8/5$, $j_6=3$, $q^6=(1/4, 0, 3/4)$, $v^5=(\alpha^5+\beta^5)/2=2{,}133$

Шаг 7. $\alpha^6=11/4$, $i_7=2$, $p^7=(1/7, 3/7, 3/7)$, $\beta^6=11/6$, $j_7=3$, $q^6=(1/5, 0, 4/5)$, $v^6=(\alpha^6+\beta^6)/2=2{,}291$

Шаг 8. $\alpha^7=14/5$, $i_8=2$, $p^8=(1/8, 1/2, 3/8)$, $\beta^7=12/7$, $j_8=2$, $q^8=(1/6, 1/6, 2/3)$, $v^7=(\alpha^7+\beta^7)/2=2{,}257$.

На дальнейших шагах получаем следующие значения:

$v_8\approx2{,}02$, $v_9\approx1{,}98$, $v_{10}\approx1{,}875$, $v_{11}\approx1{,}948$, $v_{12}\approx2{,}208$.

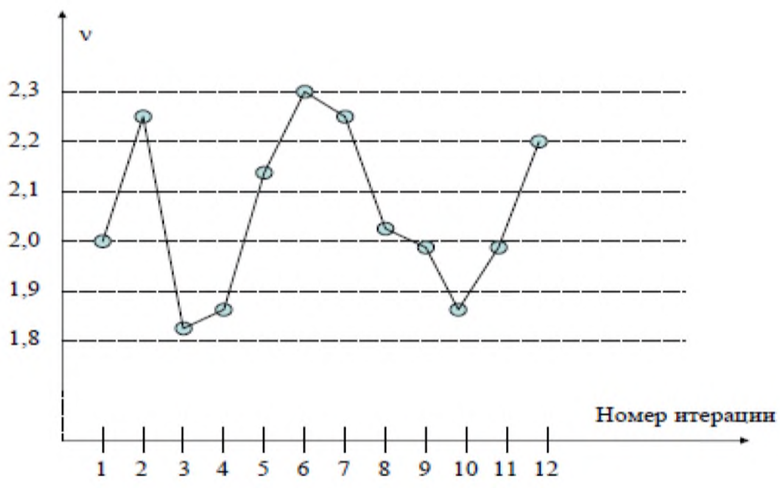


Рис.16. Итерационный процесс

Из рис.16 видно, что процесс не монотонен, поэтому его остановка по критерию $|v^N - v^{N-1}| \le \varepsilon$ не корректна.[6]

Задания к практической работе

В матричной игре получить приближения цены игры и оптимальных смешанных стратегий, выполнив 20 итераций. Построить график зависимости цены игры от номера итерации.

Варианты задания

Вариант 1 $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$	Вариант 5 $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$
Вариант 2 $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 10 & 5 \end{bmatrix}$	Вариант 6 $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$
Вариант 3 $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	Вариант 7 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$
Вариант 4 $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 11 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$	Вариант 8 $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 & -5 \\ 3 & 0 & 6 & -1 \\ 9 & 5 & 10 & -2 \end{bmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Пояснить основные принципы метода фиктивного розыгрыша Брауна–Робинсона
2. Каковы недостатки метода фиктивного розыгрыша?
3. Какова сложность одной итерации метода?
4. Как рассчитываются частоты стратегий?

Практическая работа 11. Выбор оптимального решения с помощью дерева решений»

Задача 1. Вы рассматриваете перспективы создания новой консалтинговой службы. Объем необходимых вложений на начальном этапе $200 тыс. Существует 60%-ная вероятность, что спрос будет высоким в 1-й год. Если спрос будет высоким в первый год, то в последующие годы вероятности высокого и низкого спроса составят 80% и 20% соответственно. Если спрос будет низким в 1-й год, то в последующие годы вероятности высокого и низкого спроса составят 40% и 60% соответственно. При высоком спросе прогнозируемые доходы составят 500 тыс. дол. в год; при низком спросе прогнозируемые доходы равны 300 тыс. дол. в год. Вы можете прекратить предоставлять услуги в любой момент. Затраты, помимо связанных с использованием компьютера, прогнозируются в размере 140 тыс. дол. в год, вне зависимости от уровня спроса.

Если Вы решите не вкладывать деньги в консалтинговую службу, то сможете вложить их на практически безрисковой основе под 20% в год.
Если будет решено организовать консалтинговую службу, Вам необходимо будет решить вопрос с проведением компьютерных расчетов, составляющих основу деятельности. Один возможный вариант - купить сервер.

Срок морального устаревания его 5 лет. Затраты будут состоять из первоначальных расходов в размере 150 тыс. долларов и ежегодных расходов на эксплуатацию в размере 20 тыс.

Альтернативный вариант — арендовать компьютерные ресурсы по мере необходимости. В этом случае затраты на аренду будут пропорциональны спросу и составят 30% доходной части за вычетом оговоренных постоянных расходов в 140 тыс. Во всех случаях никаких других издержек нет.

a) Постройте "древо решений", иллюстрирующее эти варианты и охватывающее 3 года.

b) Стоит организовать консалтинговую службу или безрисковый доход выгоднее? Рассмотрите итоги деятельности за два и три года.

c) Что лучше — купить компьютер или арендовать?

d) Предположим, что после 3 лет деятельности вы сможете продать службу, как отдельный бизнес в среднем за 350 тыс. долларов. Какому ежегодному проценту прироста соответствует полученный вами доход?

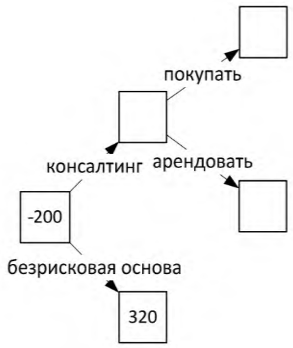
e) Четко сформулируйте любые дополнительные допущения, которые вам потребуется сделать.

Решение

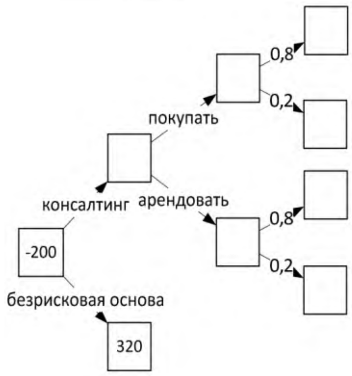
Строим дерево решений. На начальном этапе у нас есть 200 тыс. долл. и 2 альтернативы – вкладывать деньги в консалтинговую службу или вложить на безрисковой основе.

По безрисковой основе мы получаем прирост 20% каждый год. 20% * 200 = 40 тыс. долл. в год, итого за 3 года у нас 200 + 40*3 = 320 тыс. долл.

Если мы выбираем консалтинг у нас опять 2 альтернативы – покупать или арендовать сервер.



В зависимости от выбора будут разными расходы, но это мы учтем позднее. Далее мы уже не выбираем, но с вероятностью 0,8 или 0,2 в первый год высокий или низкий спрос.

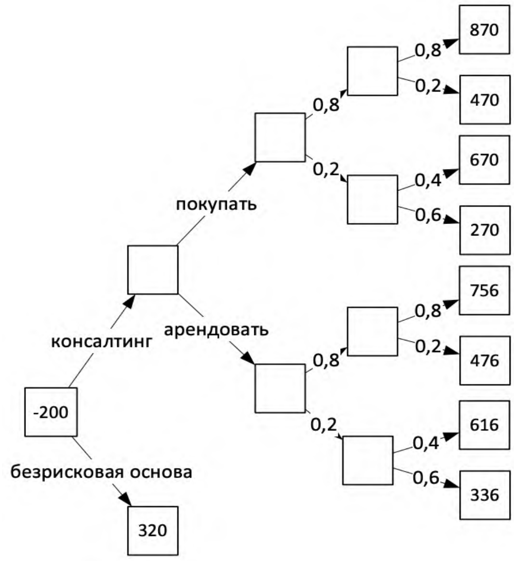


Далее, если спрос будет высоким в первый год, то в последующие годы вероятности высокого и низкого спроса составят 80% и 20% соответственно. Если спрос будет низким в 1-й год, то в последующие годы вероятности высокого и низкого спроса составят 40% и 60% соответственно.

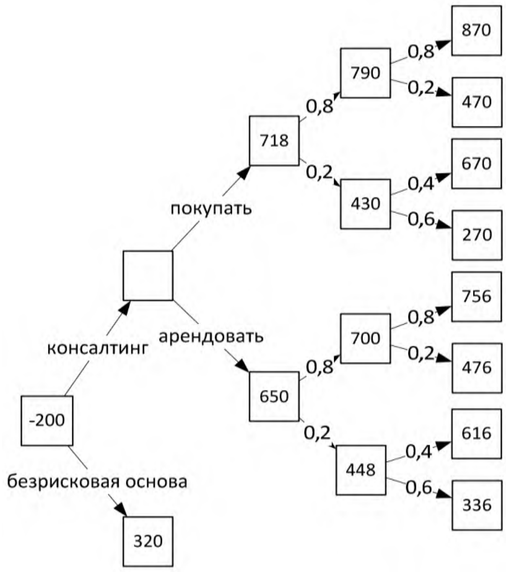
Далее считаем по каждому вероятностному исходу ожидаемую прибыль:

Сервер	Спрос в 1 год	Спрос во 2 – 3 год	Прибыль
покупать	высокий	высокий	500*3-140*3-150-20*3=870
	высокий	низкий	500+300*2-140*3-150-20*3=470
	низкий	высокий	300+500*2-140*3-150-20*3=670
	низкий	низкий	300*3-140*3-150-20*3=270
арендовать	высокий	высокий	(500*3-140*3)*0,7=756
	высокий	низкий	(500+300*2-140*3)*0,7=476
	низкий	высокий	(300+500*2-140*3)*0,7=616
	низкий	низкий	(300*3-140*3)*0,7=336

Сводим результаты в дерево решений



Двигаемся по дереву решений вверх, умножая прибыли не вероятности и складывая.



Итак, мы подошли к нашему последнему выбору – покупать или арендовать сервер. Видим, что прибыль при покупке выше (718 > 650), следовательно, выбираем «покупать».

Далее выбираем, что выгоднее – консалтинг или безрисковая основа: Прибыль по консалтингу выше (718 > 320), выбираем консалтинг, в итоге получаем чистой прибыли = 718 – 200 = 518 тыс. долл.

Если после 3 лет мы сможем продать службу за 350 тыс. долл., процент доходности

$$= \left(\sqrt[3]{\frac{350}{200}} - 1\right) \cdot 100\% = 20,5\%$$

Задания практической работы

Вариант 1. Фермер может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятность того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равна соответственно 0,25, 0,30 и 0,45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30 000 долл. чистого дохода, а урожай соевых бобов — 10 000 долл. Если цены останутся неизменными, фермер лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в 35 000 и 5 000 долл. соответственно. Постройте дерево решений. Какую культуру следует выращивать фермеру? Каково ожидаемое значение его прибыли?

Вариант 2. Рассматривается проект покупки доли (пакета акций) в инвестиционном проекте. Пакет стоит 7 млн., и по завершению проект принесет доход 12 млн. с вероятностью 0,6 или ничего с вероятностью 0,4.

При этом через некоторое время будет опубликован прогноз аналитической фирмы относительно успеха этого проекта. Прогноз верен с вероятностью 0,7, то есть, равны 0,7 условные вероятности.

Однако, в случае положительного прогноза пакет порождает до 10,6 млн., а в случае отрицательного подешевеет до 3,4 млн. Требуется составить стратегию действий: покупать ли долю, или ждать прогноза, и совершать ли покупку при том или ином результате прогноза.

Вариант 3. Компания "Большая нефть" хочет знать, стоит ли бурить нефтяную скважину на одном из участков, купленных ранее в перспективном месте. Бурение, проведенное на множестве соседних участков, показало, что перспективы не так уж хороши. Вероятность найти нефть на глубине не больше 400 м составляет около 50%. При этом стоимость бурения составит 1.5 млн., а стоимость нефти, за вычетом всех расходов, кроме расходов на бурение, составит 6 млн. Если нефть не найдена на малой глубине, не исключена возможность найти ее при более глубоком бурении. Расходы на бурение, вероятность найти нефть и приведенная стоимость нефти для этих случаев даны в таблице. Постройте дерево решений, показывающее последовательные решения о разработке скважины, которые должна принять компания "Большая нефть". На какую среднюю прибыль компания может рассчитывать?

Вариант 4. Фермер может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятность того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равна соответственно 0,25, 0,30 и 0,45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30 000 долл. чистого дохода, а урожай соевых бобов — 10 000 долл. Если цены останутся неизменными, фермер лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в 35 000 и 5 000 долл. соответственно. Постройте дерево решений. Какую культуру следует выращивать фермеру? Каково ожидаемое значение его прибыли?

Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Каждому обучающемуся обеспечен доступ к следующим электронным библиотечным системам и профессиональным базам данных:

- ЭБС «Университетская библиотека онлайн».

Электронная библиотека ежегодно обновляется и пополняется.