Методические указания

по организации практических занятий

по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики

Специальность

09.02.07 Информационные системы и программирование

2023

Методические указания по **ЕН.01 Элементы высшей математики** разработаны с учетом ФГОС СПО специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): преподаватель колледжа

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии специальностей 09.02.07 Информационные системы и программирование
Протокол № от 30 июня 2023 г.

Председатель П(Ц)К специальности

личная подпись

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол № от «» от 30 июня 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие № 1 «Операции над матрицами. Вычисление ранга матриц»

Цель: Совершенствование и применение умений выполнять операции с матрицами, находить ранг матрицы.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение матрицы
2. Определение транспонированной матрицы
3. Действия над матрицами
4. Определение ранга матрицы
5. Понятие ступенчатого вида матицы
6. Метод Гаусса приведения к ступенчатому виду

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. производить операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, перемножение, транспонирование);
2. вычислять ранг матрицы методом Гаусса

Вопросы для актуализации знаний

1. Как вычисляется сумма двух матриц, произведение матрицы на число,
2. При каком условии возможно перемножение двух матриц. Что называется произведением двух матриц?
3. Какое преобразование матрицы называется транспонированием?
4. Что называется рангом матрицы? Какие преобразования не меняют ранга матрицы?
5. Как вычисляется ранг матрицы?

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Матрицы»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

1. Вычисление линейной комбинации матриц $C=\alpha\cdot A+\beta\cdot B$

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&3&1\\2&5&3\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=2A-3B$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Проверить, совпадает ли порядок матриц A и B	Число столбцов матриц A и B равно 3, можно найти линейную комбинацию этих матриц
2.	Умножить все элементы матрицы А на число α, все элементы матрицы В – на число β и сложить соответственные элементы обеих матриц	$2\cdot A=\begin{pmatrix}2\cdot2&2\cdot3&2\cdot(-2)\\2\cdot1&2\cdot4&2\cdot0\\2\cdot(-3)&2\cdot2&2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&-4\\2&8&0\\-6&4&2\end{pmatrix}$ $3\cdot B=\begin{pmatrix}3\cdot3&3\cdot2&3\cdot0\\3\cdot(-1)&3\cdot3&3\cdot1\\3\cdot2&3\cdot5&3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&6&0\\-3&9&3\\6&10&9\end{pmatrix}$ $C=2A-3B=\begin{pmatrix}4&6&-4\\2&8&0\\-6&4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&6&0\\-3&9&3\\6&10&9\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}4-9&6-6&-4-0\\2+3&8-9&0-3\\-6-6&4-10&2-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0&-4\\5&-1&-3\\-12&-6&-7\end{pmatrix}$

3.	Записать ответ	$C=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -4\\ 5 & -1 & -3\\ -12 & -6 & -7\end{pmatrix}$

2. **Транспонирование матрицы**

Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 5\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Поменять местами строки и столбцы исходной матрицы	$A^{\tau}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 4\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$

3. **Умножение квадратных матриц**

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Найти матрицу $C=A\cdot B$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
2.	Убедиться, что матрицы А и В имеют одинаковый размер	Обе матрицы А и В – квадратные, порядка 3, матрица-произведение С=АВ имеет тот же порядок 3
3.	Вычислить элементы матрицы С по формулам $\bar{c}_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$	$\bar{c}_{11}=1\cdot 2+2\cdot(-1)+0\cdot 1=0$ $\bar{c}_{12}=-1\cdot 4+2\cdot 0+0\cdot 1=-4$ $\bar{c}_{13}=1\cdot 1+2\cdot 2+0\cdot 1=5$ $\bar{c}_{21}=-2+3+0=1$ $\bar{c}_{22}=4+0+0=4$ $\bar{c}_{23}=-1-6+0=-7$ $\bar{c}_{31}=2-4+1=-1$ $\bar{c}_{32}=-4+0+1=-3$ $\bar{c}_{33}=1+8+1=10$
4.	Выписать ответ $C=AB$	$C=\begin{pmatrix}0 & -4 & 5\\ 1 & 4 & -7\\ -1 & -3 & 10\end{pmatrix}$

4. **Вычисление ранга матрицы**

Привести матрицу $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 5 & -3 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ к ступенчатому виду

и определить её ранг:

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Переставить строки матрицы так, чтобы в верхнем левой углу (первый элемент первой строки)	В первой строке первый элемент не равен нулю. Строки можно не переставлять. Но для ручного счета удобно, чтобы «ведущий элемент был равен

	оказался ненулевой «ведущий» элемент (для ручного счета желательно, чтобы этот элемент был равен единице)	единице. Поменяем местами первую и вторую строку матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Ведущий элемент 1 в первой строке подчеркнут
2.	Переписать первую строку без изменения. Применяя элементарные преобразования, получаем нули под выбранным «ведущим» элементом. Образовали первую «ступеньку».	Из элементов второй строки вычитаем соответствующие элементы первой, умноженные на 2; из элементов третьей строки вычитаем элементы первой, умноженные на 4; из элементов 4 строки вычитаем элементы первой Первая строка остается без изменений $\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 = C_1 \\ C_2 = C_2 - 2C_1 \\ C_3 = C_3 - 4C_1 \\ C_4 = C_4 - C_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.	Оставляем без изменения первую строку и первый столбец полученной матрицы. Операции, описанные в пп.1 и 2, применяются к «укороченной» матрице (без первого столбца и первой строки)	«Ведущим» элементом берем (-1), стоящую во второй строке и втором столбце. Перепишем без изменения первый столбец и первую и вторую строки матрицы. Из элементов третьей строки вычитаем соответствующие элементы второй, умноженные на 3, из элементов последней строки вычитаем элементы второй, умноженные на 2; $\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 = C_1 \\ C_2 = C_2 \\ C_3 = C_3 - 3C_1 \\ C_3 = C_3 - 2C_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ Сделано два шага методом Гаусса. Получим вторую «ступеньку»
4.	Операции, описанные в пп.1 и 2 повторяются до тех пор, пока исходная матрица не будет приведена к ступенчатому виду.	Следующим ведущим элементом берем (-2) в третьей строке (подчеркнут). Оставляем без изменения первые три строки, а из последней строки вычитаем соответствующие элементы третьей: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.	Для вычисления ранга матрицы $r(A)$ следует подсчитать число угловых элементов в ступенчатой форме матрицы. Ранг исходной матрицы $r(A)$ равен числу угловых элементов.	Число угловых элементов ступенчатой матрицы равно двум, поэтому $r(A)$=3

Задания для самостоятельного выполнения

1. Выполнить действия с матрицами.

1.1.Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=-A-3B$

1.2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=-2A+3B$

2. Транспонировать матрицы

2.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 2.2.$B\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. Вычислить произведение матриц

3. 1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

3.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3.4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4. Привести матрицу к ступенчатому виду и определить ее ранг

4.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

4.3. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Практическое занятие № 2 «Вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы».</u>

Цель: Совершенствование и применение умений вычислять определители матрицы, обратную матрицу, решать матричные уравнения

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение обратной матрицы
2. Понятие матричного уравнения
3. Понятие определителя матрицы
4. Определение минора элемента, алгебраического дополнения элемента
5. Формулы вычисления определителей второго и третьего порядка

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. вычислять определитель 2-ого и 3-его порядков, использовать свойства определителя матрицы при вычислении определителей;
2. обращать матрицы второго и третьего порядка;
3. решать матричное уравнение

Вопросы для актуализации знаний

1. Записать формулу вычисления определителей 2-го и 3-го порядка
2. Дайте определение обратной матрицы
3. При каком условии матрица имеет обратную
4. Запишите формулу для вычисления обратной матрицы
5. Какое уравнение называется матричным. Метод решения матричного уравнения

Указания к решению задач

1. Повторите материал лекции «Матрицы»
2. Изучите содержание лекции «Определители»
3. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. **Вычисление определителя второго порядка** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Вычислить определитель второго порядка $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Применить формулу для вычисления определителя второго порядка $\det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$	$\det A = 2\cdot 2 - 3\cdot 1$
2.	Выписать ответ	$\det A = 1$

2. **Вычисление определителя матрицы третьего порядка разложением по *i*-й строке или *j*-му столбцу**

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -7 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ разложением по 1- й строке

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
3.	Записать формулу вычисления определителя разложением по *i*-й строке $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} +$ $+a_{i3}A_{i3}$	$\det A = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} - 3A_{13}$
4.	Вычислить алгебраические дополнения, необходимые для вычисления определителя	$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -7\cdot 1 - 0\cdot 8 = -7$ $A_{11} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(5\cdot 1 - 1\cdot 8) = -3$

		$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & -7\\ 1 & 0\end{vmatrix}=5\cdot 0-1\cdot(-7)=7$
5.	Вычислить определитель	$\det A=1\cdot(-7)+2\cdot(-3)-3\cdot 7=$ $=-7-6-21=-34$
6.	Записать ответ	$\det A=-34$

3. Вычисление определителя матрицы методом Гаусса

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}$ методом Гаусса

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Приводим исходную матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\to$ $\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$
2.	Подсчитать число K, равное числу перестановок при приведению к ступенчатому виду	$K=1$, строки переставляли один раз
3.	Вычислить определитель ступенчатой матрицы А как произведение элементов главной диагонали, умноженное на множитель $(-1)^K$	Угловые элементы ступенчатой матрицы совпадают совпадают с элементами главной диагонали $\det A=1\cdot 1\cdot 6\cdot(-1)^K=-6$
4.	Записать ответ	$\det A=-6$

4. Вычисление определителя матрицы методом Сарруса

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 0\\ -2 & -5 & 2\end{vmatrix}$ методомСарруса

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Приписать к определителю справа два первых столбца	$\left|\begin{matrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 0\\ -2 & -5 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 & 1\\ -1 & -3\\ -2 & -5\end{matrix}$
2.	Записать произведения элементов, зачеркнутых наклонной чертой вправо со знаком + и подсчитать сумму	$\left|\begin{matrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 0\\ -2 & -5 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 & 1\\ -1 & -3\\ -2 & -5\end{matrix}$ $2\cdot(-3)\cdot 2+1\cdot 0\cdot(-2)+1\cdot(-1)\cdot(-5)=$ $=-12+5=-7$
3.	Записать произведения элементов, зачеркнутых наклонной чертой влево со знаком - и подсчитать сумму	$\left|\begin{matrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 0\\ -2 & -5 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 & 1\\ -1 & -3\\ -2 & -5\end{matrix}$ $-(-2)\cdot(-3)\cdot 1-(-5)\cdot 0\cdot 2-2\cdot(-1)\cdot 1=$ $=-6+2=-4$

4.	Сложить полученные числа	$\det A = -7 - 4 = -11$

5. Вычисление обратной матрицы методом алгебраических дополнений

Вычислить матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Вычислить определитель матрицы $\det A$, убедиться, что $\det A \neq 0$.	Разложим определитель по первой строке: $\det A = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{22} + 5 \cdot A_{13} =$ $= 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 2 \neq 0$
2.	Для каждого элемента $a_{i,j}$ вычислить его алгебраическое дополнение $A_{i,j}$ и составить матрицу $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$	$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$ $A_{13} = 1;\ A_{21} = 3;\ A_{22} = -4;\ A_{23} = 1;\ A_{23} = 1;$ $A_{31} = -8;\ A_{32} = 14;\ A_{33} = -4;$ $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -8 & 14 & -4 \end{pmatrix}$
3.	Транспонировать матрицу $\overline{A}$, получить «присоединенную матрицу $\overline{A}^{\tau}$	$\overline{A}^{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ -2 & -4 & 14 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
4.	Разделить все элементы матрицы $\overline{A}^{\tau}$ на $\det A$; обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \overline{A}^{\tau}$.	$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \overline{A}^{\tau} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ -2 & -4 & 14 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$
5.	Выписать обратную матрицу :	$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

Задания для самостоятельной работы:

Задание 1. Вычислить определитель методом разложения по строке или столбцу, предварительно применив к нему метод Гаусса:

1.1 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ 1.2 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$ 1.3 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$ 1.4 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Задание 2. Найти матрицу, обратную к данной:

2.1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, 2.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, 2.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 2.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

Практическое занятие № 3 «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

Цель: Совершенствование и применение умений решать системы линейных уравнений различными методами

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:
1. Метод Гаусса исключения неизвестных;

Перечень умений, формируемых на занятии:
1. Решать методом Гаусса однородные и неоднородные системы линейных уравнений;

Вопросы для актуализации знаний
1. Что называется решением системы линейных уравнений? Сколько решений может иметь система линейных уравнений?
2. Какие системы называются совместными, несовместными, определенными, неопределенными?
3. Основная и расширенная матрица системы.
4. В чем заключается метод Гаусса?

Указания к решению задач
1. Изучите содержание лекции «Системы линейных уравнений»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. Решение неоднородной системы линейных уравнений методом Гаусса

Решить неоднородную систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Выписать расширенную матрицу $\overline{A}$ коэффициентов при неизвестных приписав к основной матрице A вектор свободных членов b: $\overline{A} = \left(A \mid \overline{b}\right)$	$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$
2.	Привести матрицу $\overline{A}$ к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса) определить ранг основной матрицы A и ранг расширенной матрицы $\overline{A}$.	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$ $\sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right); r(A) = 2, r(\overline{A}) = 2$

3.	Исследовать систему на совместность. Если $rang(A) < rang(\overline{A})$, то система несовместна (не имеет решения). Если $rang(A) = rang(\overline{A}) = n$, где n – число переменных, то система имеет единственное решение, перейти к п.7. Если $rang(A) = rang(\overline{A}) < n$, перейти к п. 4.	$r(A) = 2 = r(\overline{A}) < n = 3$. Система имеет множество решений. Данная матрица соответствует системе $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ Переходим к п.4.
4.	Определить зависимые и свободные переменные. Переменные, для которых угловые элементы служат коэффициентами, считать зависимыми, остальные $n - r$ переменных - свободными	Угловые элементы соответствуют переменным x_1, x_2. Переменные x_1, x_2 - базисные, переменная x_3 - свободная
5.	Выразить зависимые переменные через свободные из ступенчатой системы уравнений (обратный ход метода Гаусса)	$x_1 = 3x_3 - 1$ $x_2 = 5x_3 - 1$ (*)
6.	Найти общее решение в координатной форме. Общее решение определяется формулами, полученными в п.5. Эти выражения описывают все множество решений однородной системы: давая свободным переменным (параметрам) любые значения и вычисляя несвободные переменные, получим все решения системы	$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 1 \\ x_2 = 5x_3 - 1 \end{cases}$ Предыдущие формулы (*) задают общее решение системы. Давая переменным произвольное значение и вычисляя x_1, x_2, получим все решения системы.
7.	Если ранг матрицы равен количеству переменных , то уравнение имеет единственное решение, найти его, решая полученную систему уравнений	

Задания для самостоятельной работы № 3
«Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

Задание 1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: найти ее решение с помощью метода Гаусса.

1.1
$$\begin{cases} -3x + 5y - 6z = -5 \\ 2x - 3y + 5z = 8 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

1.2
$$\begin{cases} -2x + 5y - 6z = -8 \\ x + 7y - 5z = -9 \\ 4x + 2y - z = -12 \end{cases}$$

1.3
$$\begin{cases} x + 7y - 2z = 3 \\ 3x + 5y + z = 5 \\ -2x + 5y - 5z = -4 \end{cases}$$

1.4

$$\begin{cases} -2x+y-3z=-4 \\ 4x+7y-2z=-6 \\ x-8y+5z=1 \end{cases}$$

1.5

$$\begin{cases} -x+2y+3z=3 \\ 2x+3y-z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$$

1.6

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x-y-z=-1 \\ 3x+y+2z=5 \end{cases}$$

Задание 2. Исследовать на совместность систему уравнений с помощью теоремы Кронекера-Капелли, и, в случае совместности, найти ее решение.

2.1

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=4 \\ 9x_1+4x_2-5x_3+x_4=11 \\ -3x_1-x_2+2x_3-4x_4=1 \end{cases}$$

2.2

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ -x_1+3x_2+2x_3-3x_4=3 \\ -x_1+13x_2+8x_3+7x_4=11 \end{cases}$$

2.3

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-9x_2+2x_3+4x_4=0 \\ -x_1+5x_2-3x_3-x_4=0 \end{cases}$$

2.4

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+2x_4=-2 \\ x_1+5x_2+3x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1+2x_2-3x_3-2x_4=-7 \\ 4x_1+2x_2+x_3-x_4=-6 \end{cases}$$

2.5

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 5x_1+x_2-3x_3+4x_4=-2 \end{cases}$$

2.6

$$\begin{cases} 3x_1-8x_2-7x_3-x_4=0 \\ -x_1+7x_2-5x_3-1{,}5x_4=0 \\ x_1+6x_2-3x_3+5x_4=0 \end{cases}$$

Практическое занятие № 4 «Решение систем линейных уравнения по формулам Крамера и методом обратной матрицы».

Цель: Совершенствование и применение умений решать системы линейных уравнений различными методами

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:
1. Определение обратной матрицы
2. Понятие матричного уравнения
3. Понятие определителя матрицы
4. Определение минора элемента, алгебраического дополнения элемента
5. Формулы вычисления определителей второго и третьего порядка

Перечень умений, формируемых на занятии:
1. Решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы
2. Применять формулы Крамера для решения систем линейных уравнений

Вопросы для актуализации знаний
1. Что называется решением системы линейных уравнений? Сколько решений может иметь система линейных уравнений?
2. Какие системы называются совместными, несовместными, определенными, неопределенными?
3. Основная и расширенная матрица системы.
4. Какие системы линейных уравнений можно решать по формулам Крамера?

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Системы линейных уравнений»
2. Используйте алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. Формулы Крамера для решения неоднородной системы линейных уравнений.

Решить по формулам Крамера систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Вычислить $\det A$. Если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение.	Запишем расширенную матрицу коэффициентов $A = \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right)$; $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$
2.	Заменять в матрице коэффициентов последовательно каждый столбец на вектор свободных членов и вычислять определители каждой новой матрицы. $d_1, d_2, \ldots d_n$	$d_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180$; $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60$; $d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60$
3.	Найти решения неоднородной системы линейных уравнений по формулам: $x_1 = \frac{d_1}{\det A}, x_2 = \frac{d_2}{\det A}, \ldots$ $x_n = \frac{d_n}{\det A}$	$x_1 = \frac{d_1}{\det A} = \frac{180}{60} = 3$, $x_2 = \frac{d_2}{\det A} = \frac{60}{60} = 1$, $x_3 = \frac{d_3}{\det A} = \frac{60}{60} = 1$
4.	Записать вектор-решение	$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Решение матричных уравнений. $A\bar{x} = \bar{b}$

Найти решение матричного уравнения $A\bar{x} = \bar{b}$,

Где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, вектор неизвестных $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Вычислить $\det A$. Если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$
2.	Найти обратную матрицу A^1 к матрице А методом алгебраических дополнений	Вычисляем алгебраические дополнения $A_{11} = -2; A_{12} = 4; A_{13} = 1; A_{21} = 0; A_{22} = -2; A_{23} = 1;$ $A_{31} = 2; A_{32} = -2; A_{33} = -1;$

3.	Записываем матрицу из данных элементов	$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$
4.	Транспонируем присоединенную матрицу	$\overline{A}^{\tau}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 4 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$
5.	Разделим транспонированную присоединенную матрицу на определитель матрицы *A*	$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
6.	Найти вектор-решение по формуле $\overline{x}=A^{-1}\cdot B$,	$\overline{x}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 10\\ 0\end{pmatrix}$

Задания для самостоятельной работы
«Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, матричным методом»

Задание 1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется:

1) найти ее решение с помощью формул Крамера;

1.1
$$\begin{cases}-3x+5y-6z=-5\\ 2x-3y+5z=8\\ x+4y-z=1\end{cases}$$

1.2
$$\begin{cases}-2x+5y-6z=-8\\ x+7y-5z=-9\\ 4x+2y-z=-12\end{cases}$$

1.3
$$\begin{cases}x+7y-2z=3\\ 3x+5y+z=5\\ -2x+5y-5z=-4\end{cases}$$

1.4
$$\begin{cases}-2x+y-3z=-4\\ 4x+7y-2z=-6\\ x-8y+5z=1\end{cases}$$

1.5
$$\begin{cases}-x+2y+3z=3\\ 2x+3y-z=1\\ x-y+2z=-2\end{cases}$$

1.6
$$\begin{cases}2x-y+3z=0\\ x-y-z=-1\\ 3x+y+2z=5\end{cases}$$

Задание 2. Решить систему матричным методом, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение

2.1
$$\begin{cases}3x+2y-3z=-1\\ 2x-y+3z=2\\ x+y+2z=3\end{cases}$$

2.2
$$\begin{cases}4x-7y-3z=-10\\ 2x+9y-z=8\\ -x+6y-3z=3\end{cases}$$

2.3
$$\begin{cases}2x+3y+z=4\\ 4x-y+5z=6\\ x-2y+4z=9\end{cases}$$

2.4
$$\begin{cases}x-5y+3z=-1\\ 2x+4y+z=6\\ -3x+3y-7z=-13\end{cases}$$

2.5
$$\begin{cases}2x+y+3z=1\\ -x+3y+z=-4\\ 3x-y+3z=-4\end{cases}$$

2.6
$$\begin{cases}2x+y+3z=1\\ -x+2y-2z=-1\\ x-2y+3z=2\end{cases}$$

<u>Практическое занятие № 5 «Операции над векторами».</u>

Цель проведения занятия: формирование основных понятий по теме "Векторы и операции над ними", развитие навыков решения задач по теме "Векторы и операции над ними".

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение вектора, длины вектора, коллинеарные векторы;

2. Определение прямоугольной системы координат, координат вектора.

Перечень умений, формируемых на занятии:
1. Находить координаты вектора по координатам начала и конца;
2. Выполнять действия над векторами, заданными своими координатами;
3. Находить длину вектора,
4. Находить скалярное произведение двух векторов,
5. Находить угол между двумя векторами;

Вопросы для актуализации знаний
1. Дайте определение понятию вектор.
2. Какие действия можно производить над векторами?
3. Как вычисляется скалярное произведение двух векторов, векторное произведение, угол между векторами?

Указания к решению задач
1. Изучите содержание лекции «Векторы»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

1. Нахождение координат вектора $\overrightarrow{AB}$ по координатам точек *A* и *B*

Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2;3;-2)$ и $B(-1;2;2)$

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Изучить понятие координат вектора	
2.	От координат точки В – конца вектора $\overrightarrow{AB}$ отнять координаты точки А – начала вектора	$\overrightarrow{AB}=\{-1-2;2-3;2+2\}=\{-3;-1;4\}$

2. Нахождение линейной комбинации векторов: $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$

Даны векторы $\vec{a}\{1;-2;1\}$ и $\vec{b}\{2;-6;3\}$. Найти вектор $\vec{c}=3\cdot\vec{a}-\vec{b}$

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Вычислить координаты вектора	Число столбцов матриц *A* и *B* равно 3, можно найти линейную комбинацию этих матриц
2.	Умножить все координаты вектора на число $\vec{a}$ на число α, все координаты вектора $\vec{b}$– на число β	$3\cdot\vec{a}=\{3\cdot1;3\cdot(-2);3\cdot1\}=\{3;-6;3\}$ $-\vec{b}=\{(-1)\cdot2;(-1)\cdot(-6);(-1)\cdot3\}=\{-2;6;-3\}$
3.	Вычислить координаты вектора $\vec{c}=3\cdot\vec{a}-\vec{b}$	$\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}=\{3-2;-6+6;3-3\}=\{1;0;0\}$

3. **Вычисление длины вектора** $\vec{a}\{x;y;z\}$

Вычислить длину вектора $\vec{a}\{1;-2;1\}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму

5.	Вычислить длину вектора $\vec{a}$, заданного в координатной форме по формуле $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$	$\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

4. **Вычисление скалярного произведения векторов $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$**

Даны векторы $\vec{a}\{1;-2;1\}$ и $\vec{b}\{2;-6;3\}$. Вычислить их скалярное произведение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Найти скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме $(\bar{a},\bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$(\bar{a},\bar{b}) = 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-6) + 1\cdot 3 =$ $= 2 + 12 + 3 = 17$

5. **Вычисление угла между векторами $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$**

Даны векторы $\vec{a}\{1;2;2\}$ и $\vec{b}\{2;-6;0\}$. Вычислить угол между ними

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Найти скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме $(\bar{a},\bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$(\bar{a},\bar{b}) = 1\cdot 2 + 2\cdot(-6) + 2\cdot 0 =$ $= 2 - 12 = -15$
2.	Вычислить длину векторов $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$	$\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ $\lvert\bar{b}\rvert = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
3.	Вычислить косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в координатной форме	$\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert} = \dfrac{-15}{3\cdot 2\sqrt{10}} =$ $= -\dfrac{5}{2\sqrt{10}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{4}$
4.	Выписать ответ	$\varphi = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right) = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

6. **Вычисление координат точки С- середины отрезка АВ**

Даны две точки $A(3;-1;2)$ и $B(2;0;1)$. Вычислить координаты точки С середины отрезка АВ

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
7.	Применить формулу для вычисления координат середины отрезка $C\left(\dfrac{x_2+x_1}{2},\dfrac{y_2+y_1}{2},\dfrac{z_2+z_1}{2}\right)$	$C\left(\dfrac{3+2}{2};\dfrac{-1+0}{2};\dfrac{2+1}{2}\right) =$ $= (2,5;-0,5;1,5)$

7. **Вычисление координат точки *C*, делящей отрезок *AB* в отношении *m:n***

Даны две точки $A(3;-1;2)$ и $B(2;0;1)$. Вычислить координаты точки *C*, делящей отрезок *AB* в отношении 2:3 .

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Вычислить число λ по формуле $\lambda = \dfrac{m+n}{m}$	$\lambda = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$
2.	Подставить найденное λ в формулу для вычисления координат произвольной точки C $C\left(\dfrac{x_2-(1-\lambda)x_1}{\lambda}, \dfrac{y_2-(1-\lambda)y_1}{\lambda}, \dfrac{z_2-(1-\lambda)z_1}{\lambda}\right)$	$x = \dfrac{2-(1-2,5)\cdot 3}{2,5} = \dfrac{6,5}{2,5} = \dfrac{13}{5} = 2,6;$ $y = \dfrac{0-(1-2,5)\cdot(-1)}{2,5} = \dfrac{-1,5}{2,5} = \dfrac{-3}{5} = -0,6;$ $z = \dfrac{1-(1-2,5)\cdot 2}{2,5} = \dfrac{4}{2,5} = \dfrac{8}{5} = 1,6.$ $C(2,6;-0,6;1,6)$

8. **Вычисление площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$**

Найти площадь треугольника S_Δ, построенного на векторах $\vec{a}(-1;2;3)$ и $\vec{b}(2;0;1)$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Ознакомиться с определением вектора, равного векторному произведению $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$	$\vec{c} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$, где $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$ и $\left\vert\vec{c}\right\vert = \left\vert\vec{a}\right\vert\cdot\left\vert\vec{b}\right\vert\sin\varphi$ т.е. $\left\vert\vec{c}\right\vert$- численно равен площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2.	Вычислить координаты векторного произведения $\vec{c} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \{x_3, y_3, z_3\}$	$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$ $+\vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \{2,7,-4\}$
3.	Вычислить модуль векторного произведения $\left\vert\vec{c}\right\vert = \sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}$	$\left\vert\vec{c}\right\vert = \sqrt{2^2+7^2+(-4)^2} = \sqrt{4+49+16} = \sqrt{69}$
4.	Выписать ответ	Площадь S_Δ равна половине площади параллелограмма: $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\left\vert\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right\vert = \dfrac{1}{2}\sqrt{69}$

9. **Вычисление объема пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ и $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$**

10. Найти объем пирамиды V, построенного на векторах $\vec{a}(1;1;1)$, $\vec{b}(1;-1;1)$ и $\vec{c}(0;-1;-1)$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Записать координаты векторов в определитель третьего порядка и вычислить его	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$
2.	Для вычисления объема разделить полученный определитель на 6	$V = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Даны 4 точки: A, B, C, D, заданные своими координатами.
Найти:

а) $\overrightarrow{AB}$

б) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

в) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

г) $\cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

д) $S_{\Delta ABC}$

е) V_{ABCD}

1.1 A(1,2,3), B(0,0,1), C(4,4,-3), D(1,2,6)

1.2 A(-1,2,1), B(3,-1,1), C(1,4,2), D(5,2,1)

1.3 A(1,-2,3), B(-5,0,0), C(-3,1,3), D(1,1,3)

1.4 A(2,1,1), B(3,3,3), C(-4,-1,-2), D(6,3,3)

1.5 A(-2,-1,1), B(2,1,5), C(0,2,4), D(-4,0,6)

1.6 A(-2,1,3), B(4,3,4), C(4,-2,-3), D(6,3,4)

1.7 A(2,1,3), B(4,3,4), C(4,-2,-3), D(6,3,4)

1.8 A(2,1,-3), B(2,4,1), C(3,3,-5), D(2,-2,-1)

Практическое занятие № 6 «Уравнение прямой на плоскости»

Цель : формирование основных понятий по теме "Уравнение прямой на плоскости", развитие навыков применения формул для решения задач по теме "Уравнение прямой на плоскости".

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение прямой, нормального вектора прямой, углового коэффициента;
2. Условие перпендикулярности и параллельности прямых.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить уравнение прямой по заданным начальным условиям;
2. Находить уравнение прямой, параллельной данной, по заданным условиям;
3. Находить уравнение прямой, параллельной данной, по заданным условиям;
4. Находить уравнение прямой, перпендикулярной данной, по заданным начальным условиям
5. Находить угол между прямыми по заданным начальным условиям

Вопросы для актуализации знаний

1. Как записывается общее уравнение прямой?
2. Нарисуйте прямую, в случае когда в общем уравнении прямой А = 0.
3. Запишите уравнение прямой, проходящей через две точки.
4. Запишите условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Прямая на плоскости»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. **Составление уравнения прямой, параллельной данной**

Задание

Даны точки $A=(1;1)$, $B=(0;2)$ и $C=(3;1)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* параллельно прямой *BC*

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Изучить основные способы задания прямой на плоскости	
2.	Написать уравнение прямой BC, проходящей через две точки $B=(x_1;y_1)$ и $C=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-0}{3-0}$; $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-0}{3}$; $3(y-2)=(-1)(x-0)$; $3y-6=-x$; $x+3y-6=0$.
3.	Записать координаты вектора нормали прямой $Ax+By+C=0$ $\vec{n}\{A;B\}$	$\vec{n}\{1;3\}$
4.	Т.к. прямая, параллельная прямой *BC*, имеет такой же вектор нормали, как и прямая *BC*, выписать уравнение прямой, проходящей через точку $A=(x_0;y_0)$ и имеющую вектор нормали $\vec{n}\{A;B\}$ $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	$1(x-1)+3(y-1)=0;$ $x-1+3y-3=0;$ $x-3y-4=0.$

2. **Составление уравнения прямой, проходящей через точку $M=(x_0;y_0)$ и перпендикулярной прямой *AB*, где $A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$**

Задание

Даны точки $A=(1;1)$, $C=(0;2)$ и $D=(3;1)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* перпендикулярно прямой *BC*

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Написать уравнение прямой CD, проходящей через две точки $C=(x_1;y_1)$ и $D=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-0}{3-0}$; $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-0}{3}$; $3(y-2)=(-1)(x-0)$; $3y-6=-x$; $x+3y-6=0$.
2.	Записать координаты вектора нормали прямой $Ax+By+C=0$ $\vec{n}\{A;B\}$	$\vec{n}\{1;3\}$
3.	Т.к. прямая, перпендикулярная прямой *CD*, имеет направляющий вектор, перпендикулярный прямой *CD*, то за направляющий вектор $\vec{q}$	$\vec{q}\{1;3\}$

	можно взять вектор нормали $\vec{n}\{A;B\}$ прямой CD	
4.	Выписать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A=(x_0;y_0)$ и имеющую направляющий вектор $\vec{q}\{A;B\}$ $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}$	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}$; $3(x-1)=y-1$; $3x-y-3+1=0$; $3x-y-2=0$.

3. **Нахождение расстояния от точки до прямой**

Задание

Даны точки $A=(1;1)$, $C=(0;2)$ и $D=(3;1)$. Найти расстояние от точки *A* до прямой *CD*.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Написать уравнение прямой CD, проходящей через две точки $C=(x_1;y_1)$ и $D=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-0}{3-0}$; $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-0}{3}$; $3(y-2)=(-1)(x-0)$; $3y-6=-x$; $x+3y-6=0$.
2.	Найти расстояние *d* от точки $A(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+Bx+C=0$ по формуле $d=\frac{Ax_0+Bx_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$	Расстояние от точки $A=(1;1)$, до прямой $CD: x+3y-6=0$ $d=\frac{\lvert 1\cdot1+3\cdot1-6\rvert}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$;
3.	Выписать ответ	Расстояние от точки *A* до прямой *CD* равно $\frac{\sqrt{10}}{5}$

4. **Вычисление угла между прямыми**

Задание

Даны точки $A=(1;1)$, $C=(0;2)$ и $D=(3;1)$. Найти угол между прямыми AC и CD

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Написать уравнение прямой CD, проходящей через две точки $C=(x_1;y_1)$ и $D=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-0}{3-0}$; $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-0}{3}$; $3(y-2)=(-1)(x-0)$; $3y-6=-x$; $x+3y-6=0$.
2.	Написать уравнение прямой AC, проходящей через две точки $A=(x_1;y_1)$ и $C=(x_2;y_2)$:	$\frac{y-1}{0-1}=\frac{x-1}{2-1}$; $\frac{y-1}{-1}=\frac{x-1}{1}$;

	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$x+y-2=0$;
3.	Вычислить косинус угла между прямыми, записанными в общем виде $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\cos\varphi=\dfrac{1\cdot1+1\cdot3}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=$ $=\dfrac{1+3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=0,4\sqrt{5}$
4.	Выписать угол между прямыми	$\varphi=\arccos\left(0,4\sqrt{5}\right)$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Даны вершины треугольника $A=(2;-2)$, $B=(3;-5)$, $C=(5;7)$. Составить уравнение высоты BD, и средней линии, параллельной AB.
2. Составить уравнение всех сторон треугольника ABC, где $A=(3;2)$, $B=(5;-2)$, $C=(5;2)$
3. Даны параллельные прямые $3x-y+2=0$ и $3x-y-5=0$. Написать уравнение прямой, им параллельной и проходящей на равном расстоянии от них.
4. Стороны AB, BC, AC треугольника ABC соответственно даны уравнениями: $x+21y-22=0$, $5x-12y+7=0$, $4x-33y+146=0$. Найти высоту, опущенную на сторону BC.
5. Даны уравнения двух прямых: $2x+ay-1=0$, $ax+8y+3=0$. Определить, при каком значении параметра a прямые пересекаются.
6. Найти точки пересечения прямой $3x-2y+4=0$ с осями координат.
7. Вычислить расстояние между параллельными прямыми $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$
8. Даны уравнения двух сторон прямоугольника: $3x-2y-5=0$ и $2x+3y+7=0$ и одна из вершин $A(-2;1)$. Вычислить площадь прямоугольника.
9. Доказать, что прямая $2x-3y+6=0$ не пересекает отрезок, ограниченный точками $M(-2;-3)$ и $N(1;-2)$

Практическое занятие № 7 «Кривые второго порядка»

Цель: формирование основных понятий по теме «Кривые второго порядка», развитие навыков применения уравнений кривых для решения задач

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение окружности, эллипса, гиперболы, параболы;
2. Определение фокуса, эксцентриситета, большой и малой полуосей, действительной и мнимой оси гиперболы, директрисы параболы;
3. Канонические уравнения кривых второго порядка;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Определять тип кривой второго порядка по заданному общему уравнению;
2. Строить кривую второго порядка на плоскости по ее каноническому уравнению;

Вопросы для актуализации знаний

1. Как записывается общее уравнение кривой второго порядка?

2. Запишите канонические уравнения основных кривых второго порядка.
3. Какой метод используется для сведения общего уравнения к каноническому?

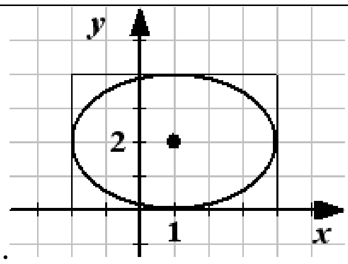
Указания к решению задач

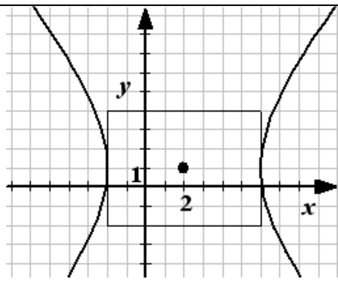
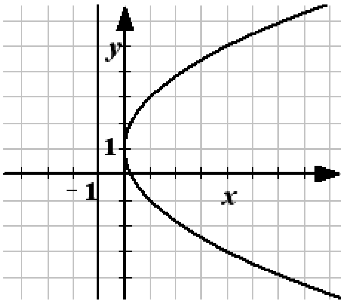
1. Изучите содержание лекции «Кривые второго порядка»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. Построение кривой второго порядка

Задание

Построить кривые $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$, $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$, $(y-1)^2=4x$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Ознакомиться с каноническими уравнениями кривых второго порядка и определить тип кривой	$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ - эллипс $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$ - гипербола $(y-1)^2=4x$ - парабола
2.	Определить Для эллипса: Центр, большую и малую полуось *a* и *b*, Для гиперболы: Центр, действительную и мнимую полуось *a* и *b*, Для параболы: Директрису, фокус, направление ветвей параболы	1.Преобразуем уравнение эллипса $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ $\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$ Это эллипс с центром $C(1;2)$, большой полуосью a=3 и малой полуосью b=2. 2.Преобразуем уравнение гиперболы $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$ $\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{(y-1)^2}{5^2}=1$ Это гипербола с центром $C(2;1)$, действительной полуосью *a*=4 и мнимой полуосью b=5. 2.Преобразуем уравнение параболы $(y-1)^2=2\cdot 2x$ Это парабола с вершиной $C(0;1)$ и директрисой $x=\frac{-2}{2}=-1$
3.	Построить график кривой второго порядка по найденным параметрам	 1.

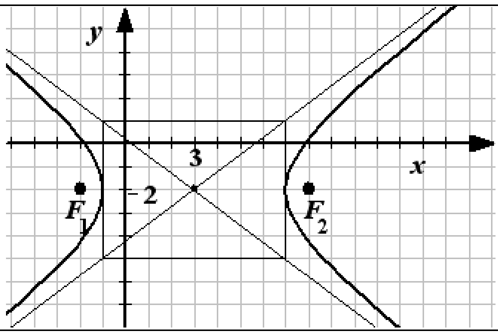
		 2.  3.

2. **Определить тип кривой второго порядка по заданному общему уравнению**

Задание

Написать каноническое уравнение кривой $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$. Определить тип кривой, выписать ее параметры.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
4.	Ознакомиться с каноническими уравнениями кривых второго порядка	
5.	Выделить полные квадраты независимых переменных	$9x^2-54x=9\left(x^2-6x\right)=$ $=9\left(x^2-6x+9\right)-81=9\left(x-3\right)^2-81$; $-16y^2-64y=-16\left(y^2+4y\right)=$ $=-16\left(y^2+4y+4\right)+64=-16\left(y+2\right)^2+64$
6.	Преобразовать уравнение	$9\left(x-3\right)^2-81-16\left(y+2\right)^2+64-127=0$ Или $9\left(x-3\right)^2-16\left(y+2\right)^2=144$. Отсюда $\frac{\left(x-3\right)^2}{16}-\frac{\left(y+2\right)^2}{9}=1$, или $\frac{\left(x-3\right)^2}{4^2}-\frac{\left(y+2\right)^2}{3^2}=1$
7.	Определить тип кривой	гипербола
8.	Выписать параметры кривой	Действительная полуось $a=4$, мнимая $b=3$ $c^2=a^2+b^2=16+9=25,\ c=5$ Расстояние между фокусами равно $2c=10$. Центр симметрии $C\left(3;-2\right)$ Координаты фокусов $F_1\left(x_0-c;y_0\right),\ F_1\left(-2;-2\right)$, $F_2\left(x_0+c;y_0\right),\ F_2\left(8;-2\right)$,

9.	Построить кривую второго порядка по найденным параметрам	

3. **Дано уравнение линии в декартовых координатах. Преобразовать его в уравнение в полярных координатах**

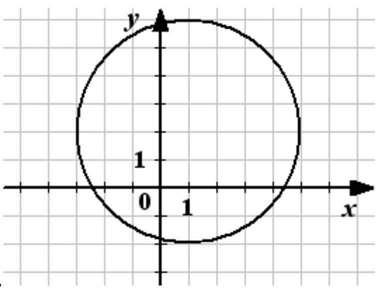
Задание

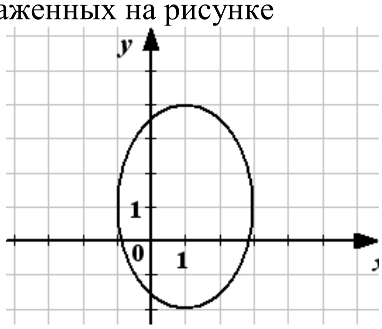
Написать уравнение кривой $\left(x^2+y^2\right)^2=4xy^2$ в полярных координатах.

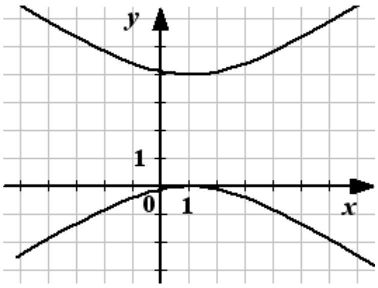
№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Воспользоваться формулами перехода от декартовых координат к полярным	$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$
2.	Подставить данные выражения в исходное уравнение	$\left(r^2\cdot\cos^2\varphi+r^2\cdot\sin^2\varphi\right)^2=4r\cdot\cos\varphi\cdot r^2\cdot\sin^2\varphi$ Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, получим $\left(r^2\cdot\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\right)^2=4r^3\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$ $r^4=4r^3\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$ Поделим обе части на r^3 и получим искомое уравнение $r=4\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$

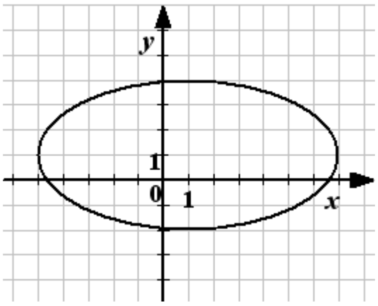
Задания для самостоятельного выполнения

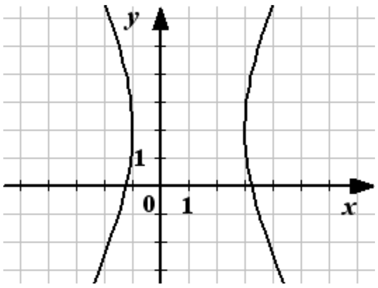
1.Составить уравнение кривых, изображенных на рисунке

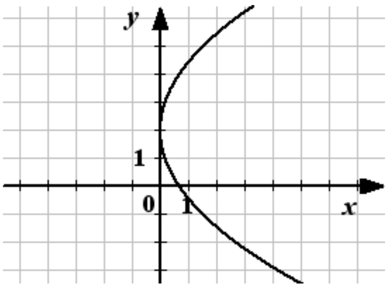
1. 1. 

1.2. 

1.3. 

1.4. 

1.5. 

1.6. 

2. Привести к каноническому виду, определить тип кривой и построить ее график

2.1 $x^2+y^2-4x+6y=0$	2.2. $x^2+y^2+6x-4y=0$
2.3. $y^2-16x-6y+25=0$	2.4. $x^2+8x-9y-29=0$
2.5. $4x^2-9y^2-16x-18y-29=0$	2.6. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$
2.7. $4x^2-y^2+16x+18y-49=0$	2.8. $4x^2+4y^2-12x+4y+3=0$

3. Преобразовать к полярным координатам уравнение линии

3.1. $\left(x^2+y^2\right)^2=20x^3$	3.2. $\left(x^2+y^2\right)^2=8y^3$
3.3. $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$	3.4. $\left(x^2+y^2\right)^2=x^4$
3.5. $\left(x^2+y^2\right)^3=y^4$	3.6. $\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2$
3.7. $\left(x^2+y^2\right)^3=8x^3y$	

<u>Практическое занятие № 8 « Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей».</u>

<u>Цель:</u> Приобретение и совершенствование навыков вычисления пределов последовательности и функции

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение числовой последовательности, определение предела числовой последовательности;
2. Определение предела функции в точке, теоремы о пределах, число *e*, первый и второй замечательные пределы;
3. Определение непрерывности функции в точке. Условие непрерывности функции в точке.
4. Классификация точек разрыва.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Вычислять пределы числовых последовательностей и функций представляющих собой рациональные дроби, при $x\to\infty$ $(n\to\infty)$, и раскрывать неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

2. Вычислять пределы числовых последовательностей и функций представляющих собой иррациональные дроби, при $x \to \infty$ ($n \to \infty$), и раскрытие неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
3. Вычислять пределы функций при $x \to a$
4. Вычислять пределы функций, представляющих рациональные дроби, при $x \to a$. Раскрывать неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$.
5. Вычислять пределы функций, представляющих иррациональные дроби, при $x \to a$. Раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$.
6. Вычислять пределы функций при $x \to a$ с помощью замены функций эквивалентными бесконечно малыми. Раскрывать неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$.
7. Вычислять пределы функций, имеющих вид $y = (1+\alpha)^{\beta}$ при $\alpha \to 0,\ \beta \to \infty$. Раскрывать неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$ с использованием II замечательного предела.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Предел последовательности. Предел функции»;
2. Повторить теоремы о пределах, I и II замечательные пределы; таблицу эквивалентных бесконечно малых (см. Приложение 1);
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Вычисление пределов числовых последовательностей и функций, представляющих собой рациональные дроби, при $x \to \infty$ ($n \to \infty$), и раскрытие неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x-7}{10x^2+2x+1}$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение n или аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	$\frac{5(\infty)^2+6(\infty)-7}{10(\infty)^2+2(\infty)+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
2.	Выписать старшую степень числителя и знаменателя x^k.	$x^k = x^2$
3.	Разделить числитель и знаменатель дроби на x^k	$\frac{5x^2+6x-7}{10x^2+2x+1}=\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}-\frac{7}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$
4.	Найти предел полученного выражения.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

2. Вычисление пределов числовых последовательностей и функций представляющих собой иррациональные дроби, при $x \to \infty$ ($n \to \infty$), и раскрытие неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+6}+2n^2}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt[5]{n^4+1}}$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Подставить предельное значение *n* или аргумента *x* в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	$\frac{\sqrt[3]{(\infty)^2+6}+2(\infty)^2}{\sqrt{(\infty)^4+(\infty)+1}+\sqrt[5]{(\infty)^4+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
2. Выписать старшую степень числителя и знаменателя n^k.	$k=2,\ т.к.\ \sqrt{n^4}=n^2$ $n^k=n^2$
3. Разделить числитель и знаменатель дроби на n^k	$\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^6}+\frac{6}{n^6}}+\frac{2n^2}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^4}{n^4}+\frac{n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt[5]{\frac{n^4}{n^{10}}+\frac{1}{n^{10}}}}$
4. Найти предел полученного выражения.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^4}+\frac{6}{n^6}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt[5]{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^{10}}}}=2$

3.Вычисление пределов функций при $x\to a$

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}\left(x^3+x-5\right)$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента *x* в многочлен $\lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}\left(x^3+x-5\right)$ $\lim\limits_{x\to3}\left(x^3+x-5\right)=3^3+3-5=25$

4.Вычисление пределов функций, представляющих рациональные дроби, при $x\to a$. Раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$	$\frac{3\cdot2^2-8\cdot2+4}{5\cdot2^2-14\cdot2+8}=\frac{12-16+4}{20-28+8}=\left[\frac{0}{0}\right]$
2.	Разделить числитель и знаменатель дроби на $x-a$	$\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}=\frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)(5x-4)}=\frac{(3x-2)}{(5x-4)}$
3.	Найти предел полученного выражения.	$\lim\limits_{x\to2}\frac{3x-2}{5x-4}=\frac{3\cdot2-2}{5\cdot2-4}=\frac{6-2}{10-4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

5. Вычисление пределов функций, представляющих иррациональные дроби, при $x\to a$.

Раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Подставить предельное значение аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$	$\frac{0}{\sqrt{5-0}-\sqrt{5+0}}=\frac{0}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\left[\frac{0}{0}\right]$
2. Умножить числитель и знаменатель на сопряженный множитель	$\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$ $=\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(5-x)-(5+x)}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=$ $=\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2}$
3. Найти предел полученного выражения.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=$ $=\frac{2\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}$

6.Вычисление пределов функций при $x\to a$ с помощью замены функций эквивалентными бесконечно малыми. Раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-2\cos x}{tg^2 2x}$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos 3x}{tg^2 2x}=\frac{2-2\cos 0}{tg^2 0}=\left[\frac{0}{0}\right]=$
2.	Заменить данное выражение эквивалентным ему бесконечно малым, используя таблицу 2 эквивалентных бесконечно малых	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 3x)}{tg^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 3x)}{tg^2 2x}\approx$ $\approx\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{9x^2}{2}}{4x^2}=$
3.	Найти предел полученного выражения.	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^2}{4x^2}=\frac{9}{4}$

7. Вычисление пределов функций, имеющих вид $y=(1+\alpha)^{\beta}$ при $\alpha\to 0$, $\beta\to\infty$. Раскрытие неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$ с использованием II замечательного предела.

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента *x* в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[1^\infty\right]$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=\left[1^\infty\right]=$
2.	Преобразовать данное выражение к виду, позволяющему использовать II замечательный предел	$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+4}{2x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^x=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}\cdot\frac{4x}{2x-1}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-1}}=$
3.	Найти предел полученного выражения.	$=e^2$

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. Найти пределы последовательностей и функций

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-1}$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{3n^2-4n+1}$ 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n+1}$ 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5+n^3-n}{n^2+2n+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+3x}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{5x+1}$ 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-5x+6\right)$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{x^3+3x^2-1}$

2.Найти пределы функций

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

3.Найти пределы функций

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-5x+6\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+3x^2\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-6x^2+5x+1\right)$

4. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\left(x^2-5x+6\right)}{x+2}$ 5. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x+1}{x-3}$ 6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{5}{4x-8}$

4. Найти пределы функций

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$ 2. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$ 3. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}$

4. $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$ 5. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$ 6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

5. Найти пределы функций

1. $\lim\limits_{x\to6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$ 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

<u>Практическое занятие № 9 «Применение замечательных пределов для вычисления пределов».</u>

<u>Цель:</u> Приобретение и совершенствование навыков вычисления пределов последовательности и функции

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

5. Определение функции, области определения, области значения, свойства функции, понятие обратной функции;
6. Определение числовой последовательности, определение предела числовой последовательности;
7. Определение предела функции в точке, теоремы о пределах, число *e*, первый и второй замечательные пределы;

Перечень умений, формируемых на занятии:

8. Вычислять пределы с помощью первого замечательного предела и таблицы эквивалентных бесконечно малых.
9. Вычислять пределы функций, имеющих вид $y=(1+\alpha)^{\beta}$ при $\alpha \to 0,\ \beta \to \infty$. Раскрывать неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$ с использованием II замечательного предела.

<u>Указания к решению задач:</u>

Для решения упражнений необходимо:

4. Повторить теоремы о пределах, I и II замечательные пределы; таблицу эквивалентных бесконечно малых (см. Приложение 1);
5. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Вычисление пределов функций при $x \to a$ с помощью замены функций эквивалентными бесконечно малыми. Раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2-2\cos x}{tg^2 2x}$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
4.	Подставить предельное значение аргумента *x* в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-2\cos 3x}{tg^2 2x} = \frac{2-2\cos 0}{tg^2 0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$
5.	Заменить данное выражение эквивалентным ему бесконечно малым, используя таблицу 2 эквивалентных бесконечно малых	$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2(1-\cos 3x)}{tg^2 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2(1-\cos 3x)}{tg^2 2x} \approx$ $\approx \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \cdot \frac{9x^2}{2}}{4x^2} =$
6.	Найти предел полученного выражения.	$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4}$

2. Вычисление пределов функций, имеющих вид $y=(1+\alpha)^{\beta}$ при $\alpha\to0$, $\beta\to\infty$. Раскрытие неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$ с использованием II замечательного предела.

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
4.	Подставить предельное значение аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=$
5.	Преобразовать данное выражение к виду, позволяющему использовать II замечательный предел	$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1+4}{2x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x-1}\right)^{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}\cdot\frac{4x}{2x-1}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-1}}=$
6.	Найти предел полученного выражения.	$=e^{2}$

<u>Задачи для самостоятельного решения:</u>

1. Найти пределы функций, заменяя их на эквивалентные бесконечно малые

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos5x}{\sin 5x^{2}}$ 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{tg5x}$ 3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(1+3x)}{5x}$

4. $\lim\limits_{x\to0}x\cdot ctgx$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg5x}{\ln(1+4x)}$ 6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^{2}+2x}$

2. Найти пределы функций, используя II замечательный предел

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^{2x}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{2}{3x}}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$

<u>Практическое занятие № 10. « Исследование функции на непрерывность»</u>

<u>Цель:</u> Приобретение и совершенствование навыков вычисления односторонних пределов, нахождения точек разрыв функции и их классификации

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение предела функции в точке, одностороннего предела функции в точке;
2. Определение функции, непрерывной в точке;
3. Свойства непрерывных функций;
4. Классификация точек разрыва

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Вычислять односторонние пределы функций в точке
2. Проверять функцию на непрерывность;
3. Классифицировать точки разрыва функции

Вопросы для актуализации знаний

1. Что называется правым и левым пределом функции в точке?
2. Что называется точкой разрыва функции?
3. Как различаются точки разрыва функций?

<u>Указания к решению задач:</u>

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекций «Предел функции в точке. Непрерывность функции»;
2. Повторить классификацию точек разрыва;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. **Точки разрыва 1-го рода**

Пример: Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$ и исследовать их характер.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Найти область определения функции	Функция $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$ определена при всех значениях х, кроме 0 $x\neq 0$ $x=0$- единственная точка разрыва.
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=1$
3. Вычислить $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=0$
4. Если пределы справа и слева существуют, конечны и не равны, то точка разрыва – I рода Если хотя бы один предел из двух не существует или бесконечен – то это точка разрыва II рода	В точке $x=0$ функция имеет разрыв I рода

2. **Точки разрыва II рода**

Пример: Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x}{x-3}$ и исследовать их характер.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Найти область определения функции	Дробь определена, когда знаменатель дроби не равен нулю $x-3\neq 0$ $x\neq 3$ $x=3$- единственная точка разрыва.
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{3}{-0}=-\infty$

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{3}{+0}=+\infty$
4. Если пределы справа и слева существуют, конечны и не равны, то точка разрыва – I рода Если хотя бы один предел из двух не существует или бесконечен – то это точка разрыва II рода	В точке $x=3$ функция имеет бесконечный разрыв II рода

3. **Исследование функции на непрерывность и определение характера точек разрыва**

Пример: Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$ и определить тип точек разрыва, если они есть.

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Определить точки, в которых может быть разрыв – границы интервалов, на которых функция имеет значения, заданные разными функциями	$x=-1$ - возможные точки разрыва $x=1$
2. Вычислить пределы справа и слева от возможных точек разрыва	$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=-1+4=3$ $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=(-1)^2+2=3$ $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1^2+2=3$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2\cdot 1=2$
3. Если пределы справа и слева существуют конечны и равны друг другу, то функция непрерывна в данной точке, если пределы не равны друг другу- то это точка разрыва I рода	В точке $x=-1$ функция непрерывна В точке $x=1$ функция имеет разрыв I рода

Задания для самостоятельной работы в классе

1. **Вычислить пределы**

1. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{3}{x^2-2x+1}$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{3}{x^2-2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x-1}{x^2-3x-10}$ и $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x-1}{x^2-3x-10}$
3. $\lim\limits_{x\to 2-0} 1+2^{\frac{1}{x-2}}$ и $\lim\limits_{x\to 2+0} 1+2^{\frac{1}{x-2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 2-0}\left(1+2^{x-2}\right)$ и $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(1+2^{x-2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}$ и $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 1,5-0} 2^{2x-3}$ и $\lim\limits_{x\to 1,5+0} 2^{2x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{x-1}$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{x-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x^2-1}$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x^2-1}$

2. **Для заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер**

1. $y=\dfrac{x}{x-3}$ 2. $y=3^{\frac{1}{x}}$ 3. $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$

3. **Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.**

1. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{при}\quad x\ne 0\\ 1, & \text{при}\quad x=0\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0\\ x^2, & 0<x<1\\ x+1, & x\ge 1\end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\cos x}, & \text{при}\quad x\ne \dfrac{\pi}{2}\\ 1, & \text{при}\quad x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Практическая работа № 11. «Табличное дифференцирование.»

Цель: Приобретение и совершенствование навыков дифференцирования функций с использованием правил дифференцирования и формул производных элементарных функций

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение производной функции в точке;
2. Правила дифференцирования;
3. Таблица производных элементарных функций;
4. Геометрический смысл производной;
5. Условие экстремума функции в точке;
6. Условие возрастания и убывания функции на интервале;
7. Алгоритм исследования функции;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить производные элементарных функций, сложных функций;
2. Применять правила дифференцирования;
3. Уметь строить график функции по проведенному исследованию;

Вопросы для актуализации знаний

1. Перечислить правила дифференцирования
2. Перечислить формулы производных элементарных и сложных функций;
3. Перечислить пункты алгоритма исследования функций.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции 3 «Производная функции» ,
2. Повторить правила дифференцирования, таблицу производных (см. Приложение 2);
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее в тренинге умений.

1. **Вычисление производной степенной функции с натуральным, целым отрицательным и рациональным показателями**

Пример: Найти производную функции $y = \frac{1}{x^3} + \sqrt{x^3} + x^4$

РЕШЕНИЕ

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило возведения числа в отрицательную и рациональную степень , привести функцию к виду. $y = x^n$	$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ $y = x^{-3} + x^{\frac{3}{2}} + x^4$
2. Найти производную данной функции, используя формулу $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	$y' = \left(x^{-3} + x^{\frac{3}{2}} + x^4\right)' = \left(x^{-3}\right)' + \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' + \left(x^4\right)' =$ $= -3x^{-3-1} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + 4x^3 = -3x^{-4} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 4x^3 =$ $= -\frac{3}{x^4} + \frac{\sqrt{x}}{2} + 4x^3$

2. **Вычисление производной суммы или разности функций, произведения функции на число.**

Пример 1: Вычислить производную функции $y = -3^x + 3x^5 - 2\log_2 x$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правила дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$ и $(Cu)' = Cu'$, вычислить производную данной функции	$y' = \left(-3^x + 3x^5 - 2\log_2 x\right)' =$ $= -\left(3^x\right)' + 3\left(x^5\right)' - 2\left(\log_2 x\right)' =$ $= -3^x \cdot \ln 3 + 3 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} =$ $-3^x \cdot \ln 3 + 15x^4 - \frac{2}{x \cdot \ln 2}$

3. **Вычисление производной произведения и частного функций**

Пример 1: Найти производную функции $y = \left(x^2 + 1\right) \cdot e^x$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правила дифференцирования $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ вычислить производную данной функции	$y' = \left(\left(x^2 + 1\right) \cdot e^x\right)' =$ $= \left(x^2 + 1\right)' \cdot e^x + \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(e^x\right)' =$ $2x \cdot e^x + \left(x^2 + 1\right) \cdot e^x$

Пример 2: Найти производную функции $y=\dfrac{\ln x}{1-\sin x}$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило дифференцирования $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ вычислить производную данной функции	$y'=\left(\dfrac{\ln x}{1-\sin x}\right)'=$ $=\dfrac{(\ln x)'(1-\sin x)-\ln x\cdot(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=$ $=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1-\sin x)+\ln x\cdot\cos x}{(1-\sin x)^2}=$ $=\dfrac{(1-\sin x)+x\cdot\ln x\cdot\cos x}{x(1-\sin x)^2}$

4. **Дифференцирование сложной функции. Нахождение значения производной функции в точке $x=x_0$**

Пример: Вычислить производную функции $y=\sqrt{\ln(3x+1)}+\sin^3 x-\dfrac{1}{2x-3}$ в точке $x=1$

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Выписать сложные функции, входящие в данную.	1. $Z_1=\sqrt{\varphi(u)}$, $\varphi(u)=\ln(u)$, $u=(3x+1)$ 2. $Z_2=V^3$, $V(x)=\sin x$ 3. $Z_3=\dfrac{1}{t}$, $t(x)=2x-3$
2.	К каждой из выделенных сложных функций применить правило дифференцирования сложной функции	$Z_1'=\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi(u)}}\cdot\varphi'(u)\cdot u'(x)=$ $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(u)}}\cdot\dfrac{1}{u}\cdot 3=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(3x+1)}}\cdot\dfrac{1}{3x+1}\cdot 3=$ $\dfrac{3}{2(3x+1)\sqrt{\ln(3x+1)}}$ $Z_2'=3V^2\cdot V'(x)=3\sin^2(x)\cdot\cos x$ $Z_3'=(t^{-1})'=-t^{-2}\cdot t'(x)=-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$
3.	Записать производную данной функции, используя правила дифференцирования	$y'=\dfrac{3}{2(3x+1)\sqrt{\ln(3x+1)}}+$ $+3\sin^2(x)\cdot\cos x-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$
4.	Подставить значение $x=x_0$ в полученное выражение производной.	$y'=\dfrac{3}{2(3+1)\sqrt{\ln(3+1)}}+$ $+3\sin^2 1\cdot\cos 1-\dfrac{2}{(2-3)^2}=$ $\dfrac{3}{8\sqrt{\ln 4}}+3\sin^2 1\cdot\cos 1-2$

1. **Применение правила Лопиталля.**

1.1. Раскрытие неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$,

Пример: Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$ с помощью правила Лопиталля

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Убедиться, что имеем дело с неопределенностью $\left[\frac{0}{0}\right]$ Вычислить первую производную числителя и знаменателя	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(\sin 3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7\cos 7x}{3\cos 3x}=\frac{7}{3}$ Т.к. $\cos 0=1$

1.2. Раскрытие неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример: Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^x}{x^2+1}$ с помощью правила Лопиталля

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Убедиться, что имеем дело с неопределенностью $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ Вычислить первую производную числителя и знаменателя	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^x}{x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(2^x)'}{(x^2+1)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^x\ln 2}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(2^x\ln 2)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{2}=\infty$

1.3. Раскрытие неопределенности $[0\cdot\infty]$.

Пример: Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$ с помощью правила Лопиталля

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Убедиться, что имеем дело с неопределенностью $[0\cdot\infty]$	$\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=[0\cdot\infty]$
2.	Сделать замену, приводящую данную неопределенность к $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: $\lim\varphi(x)\cdot\psi(x)=\lim\frac{\varphi(x)}{1/\psi(x)}=$ $=\lim\frac{\psi(x)}{1/\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=[0\cdot\infty]=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{2x}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$

1.4. Раскрытие неопределенности $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$

Пример: Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$ с помощью правила Лопиталля

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
3.	Убедиться, что имеем дело с неопределенностями $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$	$\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}=\left[0^0\right]$
4.	Прологарифмировать выражение и получить неопределенность $[0\cdot\infty]$:	Положим $y=x^{\sin x}$, $\ln y=\sin x\ln x$ $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x[0\cdot\infty]$
5.	Сделать замену, приводящую данную неопределенность к $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:	$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$ $\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=$ Итак, $\ln y\to 0$ $=-\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{(x\cos x)'}=$ $-\lim\limits_{x\to 0}\cdot\frac{2\sin x\cos x}{\cos x+x\cdot(-\sin x)}=\frac{0}{1}=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}y=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^0=1$

Задание 1. Найти производные функций

1.1. а) $y=\frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}$ б) $y=3\sin\frac{1}{x}$ в) $y=x\cdot\ln tgx$ г) $y=\arcsin\frac{1}{x}$

1.2. а) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ б) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ в) $y=x\cdot\left(1+e^{-x}\right)$ г) $y=\operatorname{arc}tg\left(x^2\right)$

1.3. а) $y=\frac{3-x^2}{x}$ б) $y=\sqrt[3]{1+\cos x}$ в) $y=\ln\frac{x}{x+1}$ г) $y=\arccos\frac{1}{x}$

1.4. а) $y=x\sqrt{2+x^2}$ б) $y=\frac{\sin 3x}{\cos 5x}$ в) $y=\ln\sqrt{x+1}$ г) $y=\arcsin\sqrt{x}$

1.5. а) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ б) $y=(\sin x+\cos x)^2$ в) $y=\ln\frac{x^2}{x-1}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\frac{1}{x}$

1.6. а) $y=x^2e^{-x}$ б) $y=\frac{x^2}{\sin^2 x}$ в) $y=\ln tgx$ г) $y=\arcsin(x=1)$

1.7. а) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ б) $y=\frac{\sin 5x}{1-2\sin 5x}$ в) $y=\ln\cos 3x$ г) $y=\arcsin\frac{x}{x+1}$

1.8. а) $y=\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$ б) $y=e^{\sin 2x}$ в) $y=\ln\sqrt[3]{1+tgx}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

1.9. а) $y=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$ б) $y=\sqrt[3]{ctg^2 3x-1}$ в) $y=\ln\left(e^x-e^{-x}\right)$ г) $y=\arcsin\frac{x}{x+1}$

1.10. а) $y=(3+x)\sqrt{4x-x^2}$ б) $y=\frac{1+tg2x}{1-tg2x}$ в) $y=\ln\cos 3x$ г) $y=\arccos\frac{x^2}{x+1}$

1.11. а) $y=x^2\sqrt{1-x}$ б) $y=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$ в) $y=\ln\left(e^x-1\right)$ г) $y=\arcsin\left(x^3\right)$

1.12. а) $y=(x+4)\sqrt{2-x}$ б) $y=\frac{1}{tg2x}$ в) $y=\ln\frac{x^2}{x^2+1}$ г) $y=\arcsin e^x$

1.13. а) $y=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$ б) $y=e^{-x}\sin x$ в) $y=\ln\sqrt{x^2+2x+1}$ г) $y=\frac{1}{\arcsin x}$

1.14. а) $y=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ б) $y=\sin^2(4x+3)$ в) $y=\ln\frac{1}{e^x+1}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\sqrt{x^2+1}$

1.15. а) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{x-1}$ б) $y=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ в) $y=\ln tg\frac{x}{2}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\sqrt{x+2}$

2.16. а) $y=\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$ б) $y=e^{\frac{1}{x}}$ в) $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{x}}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\left(e^{-x}\right)$

1.17. а) $y=3x^2\cdot\sin 5x$ б) $y=\sin(\ln x)$ в) $y=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$ г) $y=\arccos\left(x^2+1\right)$

1.18. а) $y=\frac{x^2-4}{\sqrt{2x-5}+3}$ б) $y=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ в) $y=\ln\sqrt[3]{x+1}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\frac{1}{x^3}$

2.19. а) $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$ б) $y=\frac{1+tg^2x}{\cos x}$ в) $y=\ln\left(x+e^{-x}\right)$ г) $y=\arcsin\sqrt{x+1}$

1.20. а) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ б) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$ в) $y=\ln\left(e^{-2x}+1\right)$ г) $y=\arcsin(\cos x)$

1.21. а) $y=\frac{x^2}{\ln x}$ б) $y=e^{-x}\sin^2 x$ в) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}+3ctgx$ г) $y=\arcsin\frac{x}{x+1}$

1.22. а) $y=\frac{e^x}{x^2}-\sqrt[3]{x^4+3}$ б) $y=\frac{\ln tgx}{\sin x}$ в) $y=\ln\frac{x^2}{x-1}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\sqrt[3]{x}$

1.23. а) $y=e^{x^2+2x-1}$ б) $y=\frac{ctg^2x}{\sin^2 2x}$ в) $y=\ln\frac{x^2-1}{x+1}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\frac{1}{x^4}$

1.24. а) $y=\frac{x^2-9}{x^2+9}$ б) $y=e^{\sin^3 x}$ в) $y=x\cdot\ln\sqrt{x+3}$ г) $y=\arcsin\frac{x+1}{x+2}$

1.25. а) $y=\sqrt[3]{x^7}\cdot\cos x$ б) $y=\frac{\sin^3 2x}{\cos^3 x}$ в) $y=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ г) $y=\operatorname{arc}tg\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Задание 2. Найти производные функций с помощью логарифмического дифференцирования

2.1 $y=x^{\frac{5}{x}}$ 2.2 $y=x^{\sin x}$ 2.3 $y=x^{\cos x}$ 2.4 $y=x^{\ln x}$

2.5 $y=x^{e^x}$ 2.6 $y=(\sin x)^{e^x}$ 2.7 $y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$ 2.8 $y=(\sin x)^{x^2}$

2.9 $y=(\ln x)^{e^x}$ 2.10 $y=(\sin x)^{\ln x}$ 2.11 $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ 2.12 $y=(tgx)^{x^2}$

2.13 $y=(\cos x)^{x^2}$ 2.14 $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$ 2.15 $y=\ln x^{tgx}$ 2.16 $y=(\sin 2x)^x$

2.17 $y=x^{x^3}$ 2.18 $y=(\sin 3x)^x$ 2.19 $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$ 2.20 $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$

2.21 $y=x^{\cos 2x}$ 2.22 $y=(\sin 3x)^x$ 2.23 $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$ 2.24 $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$

2.25 $y=(\sin 3x)^{\cos 2x}$

Задание 3. Найти производные сложных функций:

1. $y=\left(1-x^4\right)^3$
2. $y=\sqrt{1+x^3}$
3. $y=\dfrac{2}{\left(3x+2\right)^3}$
4. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$
5. $y=\dfrac{1}{2}tg^2x$
6. $y=\ln\cos x$
7. $y=\sin\left(2x+3\right)$
8. $y=arcctg\sqrt{x}$
9. $y=e^{x^2-2x}$

Задание 4. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталля

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg5x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 7x}{x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx-1}{\sin 4x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-1+\cos 3x}{e^x-e^{-x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tx-artgx}{x^3}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5-3x+2}{e^{3x}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{2x}}$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+\sin x}$
12. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln\left(x-1\right)$
13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)tgx$
14. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$

<u>Практическое занятие № 12. «Дифференцирование функций, заданных неявно, заданных параметрически, показательно-степенных функций.»</u>

<u>**Цель:**</u> Приобретение и совершенствование навыков дифференцирования функций, заданных параметрически, функций, заданных неявно.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Таблица производных;
2. Правила дифференцирования
3. Определение функции, заданной параметрически.
4. Определение неявной функции
5. Логарифмическое диффеенцирование.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить производную функции, заданной параметрически;
2. Находить производную неявной функции;
3. Находить показательно степенную функции.

<u>Указания к решению задач</u>

1. **Дифференцирование функции, заданной параметрически**

Пример: Вычислить производную функции $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму

1.	Из уравнения $x=\varphi(t)$ выразить переменную t как обратную функцию от x	$x=\cos t$ $t=\arccos x$
2.	Подставить полученное выражение во второе уравнение	$y=\sin^2(\arccos x)$
3.	Вычислим производную функции $y=f(x)$	$y'=\left(\sin^2(\arccos x)\right)'=2\sin(\arccos x)\times$ $\times\cos(\arccos x)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$ $\sin(2\arccos x)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

2. **Дифференцирование функции, заданной неявно**

Пример: Вычислить производную функции $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Дифференцируем обе части равенства по переменной х, помня, что у неявно является функцией от х	$\frac{2x}{4}+\frac{2yy'}{9}=0$
2.	Выразить в полученном равенстве производную y'	$\frac{x}{2}=\frac{2y}{9}y'$ $y'=\frac{x}{2}\cdot\frac{9}{2y}=\frac{9x}{4y}$

3. **Логарифмическое дифференцирование**

Пример: Вычислить производную функции $y=x^x$

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Прологарифмировать данное равенство	$y=x^x\Rightarrow\ln y=\ln x^x$
2.	Применить свойства логарифмов	$\ln y=\ln x^x$ $\ln y=x\ln x$
3.	Продифференцировать обе части равенства по переменной х помня, что у есть функция от х (неявно)	$(\ln y)'=(x\ln x)'$ $\frac{1}{y}y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'$ $\frac{1}{y}y'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$
4.	Выразить из формулы производную y'	$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

Задания для самостоятельной работы в классе

1. Найти производные функций, заданных параметрически:

1. $\begin{cases}x=3\cos t\\ y=-2\sin t\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=4\cos^3 t\\ y=4\sin^3 t\end{cases}$

2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 + t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{(t+1)^2} \\ y = \dfrac{t(1-t)}{(t+1)^2} \end{cases}$

3. Найти производные функций, заданных неявно:

1. $x^2 + y^2 - xy = 0$
2. $x^2 + y^2 + xy = 6$
3. $x^2 + y^2 = a^2$
4. $y^2 = 2px$
5. $e^y - e^{-x} + xy = 0$
6. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$
7. $x = y + arctgy$
8. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$
9. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$

4. Примените логарифмическое дифференцирование к данным функциям

1. $y = (tg3x)^{2^x}$
2. $y = (1-2x)^{2x}$

<u>Практическое занятие № 13 «Применение производных к исследованию функций».</u>

<u>Цель:</u> Приобретение и совершенствование навыков исследования функций и построения графиков функций с помощью производной

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Геометрический смысл производной;
2. Применение производной функции для нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции;
3. Применение второй производной для нахождения точек перегиба и характера выпуклости и вогнутости функции;
4. Определение непрерывности функции в точке и на промежутке, определение точки разрыва, виды точек разрыва;
5. Определение асимптоты функции. Применение предела функции для нахождения уравнения асимптоты;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить интервалы монотонности и экстремумы функции $y = f(x)$;
2. Составлять уравнения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$;
3. Находить точки перегиба и определять характер выпуклости функции;
4. Находить асимптоты функции;

Вопросы для актуализации знаний

1. Какие сведения о функции можно получить с помощью первой производной?
2. Какие сведения о функции можно получить с помощью второй производной?
3. Что называется асимптотой функции? Укажите виды асимптот.
4. Назовите общую схему исследования функции.

Указания к решению задач

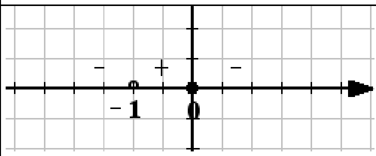
Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Приложение производной к исследованию функции»,

2. Повторить общую схему исследования графика функции (см. Приложение 3);ен
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. **Нахождение интервалов монотонности и экстремумов функции** $y = f(x)$

Пример: Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = \dfrac{4x+2}{(x+1)^2}$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Найти производную данной функции.	$y' = \dfrac{(4x+2)' \cdot (x+1)^2 - (4x+2)\left(\cdot(x+1)^2\right)'}{(x+1)^4} =$ $= \dfrac{4\cdot(x+1)^2 - 2(4x+2)(x+1)}{(x+1)^4} =$ $\dfrac{4\cdot(x+1)(x+1-2x-1)}{(x+1)^4} = \dfrac{-4x}{(x+1)^3}$
2. Найти стационарные точки кривой (точки, где $y'(x)=0$) и точки, где $y'(x)$ не существует.	$y'=0$ при $x=0$ $y'(x)$ не существует при $x=-1$
3. Отметить на числовой оси найденные точки. Определить знаки производной $y'(x)$ в каждом из полученных интервалов.	
4. Выписать интервалы монотонности функции, воспользовавшись достаточным условием: при $y'(x)<0$ функция убывает, при $y'(x)>0$ - возрастает. Интервалы должны принадлежать области определения функции.	Интервал возрастания: $(-1;0)$ Интервалы убывания $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$
5. Определить точки экстремума функции, используя достаточное условие экстремума: если при переходе слева направо через критическую точку, в которой функция определена, производная $y'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минимум. Если же при переходе через критическую точку $y'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум.	В точке $x=0$ функция имеет максимум. В критической точке $x=-1$ функция не существует

2. **Составление уравнения касательной к кривой** $y = f(x)$ **в точке с абсциссой** $x = x_0$

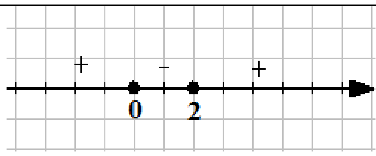
Пример: Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2 + 6x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Вычислить производную $y'(x)$	$y' = 2x+6$

2. Вычислить значение производной $y'(x)$ в точке $x_0 = -1$	$y'(-1) = 2\cdot(-1) + 6 = 4$
3. Вычислить значение функции в точке $x_0 = -1$	$y_0 = y(-1) = (-1)^2 + 6(-1) + 1 = -4$
4. Написать уравнение касательной $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$	$y = -4 + 4(x+1)$ $y = 4x$

3. Нахождение точек перегиба и определение характера выпуклости функции

Пример: Найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 4x^3 + x + 12$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Найти первую производную функции	$y' = 4x^3 - 12x^2 + 1$
2. Найти вторую производную функции	$y'' = 4\cdot 3x^2 - 12\cdot 2x = 12x^2 - 24x$
3. Найти стационарные точки, т.е. точки, в которых y'' равна нулю или не существует	$12x^2 - 24x = 0$ $12x(x-2) = 0$ $x_1 = 0,\ x_2 = 2$
4. Разбить область определения функции этими точками на интервалы и на каждом интервале определить знак y''	 На интервалах $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ $y'' > 0$; На интервале $(0;2)$ $y'' < 0$
5. Сделать заключение о выпуклости или вогнутости на каждом интервале: $y'' > 0$ - имеем выпуклость, $y'' < 0$ - имеем вогнутость	Функция выпукла на интервалах $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ Функция вогнута на интервале $(0;2)$
6. Найти точки перегиба, т.е.точки , в которых y'' меняет знак	Функция имеет две точки перегиба $(0;12)$ и $(2;-2)$

4. Нахождение асимптот функции

Пример: Найти асимптоты функции $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$

1. Найти точки разрыва функции (точки, в которых знаменатель дроби равен нулю)	$x^2 - 4 = 0$ $x_1 = -2;\ x_2 = 2$
2. Проверить, являются прямые, проходящие через точки разрыва перпендикулярно оси OX вертикальными асимптотами. Для этого необходимо вычислить $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и если хоть один из этих пределов равен ∞, то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой	$\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{x^3+2}{x^2-4} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{x^3+2}{x^2-4} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^3+2}{x^2-4} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^3+2}{x^2-4} = +\infty$ Прямые $x = -2;\ x = 2$ - вертикальные асимптоты
3. Найти наклонные асимптоты $y = kx + b$ по формулам:	$y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)$	$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$ $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^2-4}-x\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2-x^3-4x}{x^2-4}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-4x}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}\right)=0$ Прямая $y=x$ - наклонная асимптота
4. Если $k=0$; а b - конечное число, то $y=b$ - горизонтальная асимптота.	Горизонтальных асимптот нет

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

1. $y=x^2-8x+12$ 2. $y=2x^2+4x+1$ 3. $y=\frac{2x}{1+x^2}$

4. $y=\frac{e^x}{x+1}$ 5. $y=\frac{\ln x}{x}$ 6. $y=\frac{4x+2}{(x+1)^2}$

2. Найти уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $x=x_0$

1. $y=2x^2+4x+1$, $x_0=2$ 2. $y=2+x-x^2$, $x_0=1$

3. $y=x\cdot\sin x$, $x_0=0$ 4. $y=\frac{e^{2x+2}}{x+e}$, $x_0=0$

3. Найти точки перегиба и определите характер выпуклости функции $y=f(x)$.

1. $y=2x^2+4x+1$ 2. $y=2+x-x^2$ 3. $y=\frac{1}{x^2}$ 4. $y=-\frac{1}{x}$

4. Найти асимптоты кривых

1. $y=\frac{1}{x-3}$ 2. $y=e^{-x}$ 3. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

<u>Практическое занятие № 14 «Действия с комплексными числами »</u>

<u>Цель проведения занятия:</u> Совершенствование и применение умений выполнять действия с комплексными числами

<u>Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:</u>

1. Определение комплексного числа, модуля, главного значения аргумента комплексного числа;
2. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа;

<u>Перечень умений, формируемых на занятии:</u>

1. Находить модуль, главное значение аргумента комплексного числа;
2. Выполнять действия с комплексными числами в различных формах;

<u>Вопросы для актуализации знаний</u>

1. Какие числа называются комплексными?

2. Как построить комплексное число на плоскости?
3. Что называется модулем и главным значением аргумента комплексного числа?
4. Какие действия можно выполнять с комплексными числами?

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Комплексные числа»;
2. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач,

1. **Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа** $z=-\sqrt{3}+i$

Решение: Здесь $a=-\sqrt{3},\ b=1$: (II четверть); $r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$;

$$tg\varphi=\frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \varphi=arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

2. **Выполнить действия**

1) $(4+2i)+(1+5i)$
2) $(3+5i)-(6+3i)$
3) $(5-4i)(3+2i)$
4) $\frac{2-3i}{4+5i}$
5) $(1+i)^8$

Решение:

1) По правилу сложения комплексных чисел получим
$(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i=5+7i$
2) По правилу вычитания комплексных чисел получим
$(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i$
3) По правилу умножения комплексных чисел получим
$(5-4i)\cdot(3+2i)=\left[5\cdot3-(-4)\cdot2\right]+i\left[5\cdot2+3(-4)\right]=23-2i$
4) Умножив делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю, получим
$\frac{2-3i}{4+5i}=\frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25}=\frac{-7-22i}{41}=-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i$
5) Используя соотношение $(1+i)^2=(1+i)(1+i)=1+i+i+i^2=1+2i-1=2i$, получим
$(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=(2i)^4=2^4i^4=16\left(i^2\right)^2=16\cdot(-1)^2=16$

3. **Представить число** $z=3+3i$ **в тригонометрической форме**

Решение: Здесь $a=3,\ b=3,\ r=2\sqrt{3}$; Точка, изображающая число z, лежит в I четверти;

$tg\varphi=\frac{b}{a}=\frac{3}{3}=1,\ \varphi=\frac{\pi}{4}$. Таким образом

$$3=3i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

4. **Представить число в алгебраической форме**

$z=2(\cos2\pi+i\sin2\pi)$

Решение: Подставив значения $\cos2\pi=1$, $\sin2\pi=0$ в данное равенство, получим
$z=2(1+i\cdot0)=2$;

1. **Выполнить действия**

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
2) $10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$

4) $\sqrt[3]{1}$

Решение:

1) По правилу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме получим

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) По правилу деления комплексных чисел в тригонометрической форме получим

$$10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{10}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=5(0+i)=5i$$

3) По правилу Муавра получим

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6=\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

4) Представим число 1 в тригонометрической форме $1=\cos 0+i\sin 0$. По правилу извлечения корня из комплексного числа в тригонометрической форме получим

$$z_k=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}=$$

$$=\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3},\ k=0,1,2;$$

Если $k=0$, то $z_0=\cos 0+i\sin 0=1$

Если $k=1$, то $z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Если $k=2$, то $z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. **Вычислить** $e^{i\frac{\pi}{4}}$

Решение: По формуле Эйлера $e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. **Представить число** $z=-1+i$ **в показательной форме**

Решение: Здесь $a=-1,\ b=1,\ r=\sqrt{2},\ tg\varphi=-1,\ \varphi=\frac{3\pi}{4}$

По формуле представления числа в показательной форме $z=re^{\varphi i}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

7. **Выполнить действия**

1) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2) $\dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

3) $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6$

4) $\sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Решение

1) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{-i\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

2) $\dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

3) $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6 e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 6}=8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

4) $z_k=\sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)/4},\ k=0,1,2,3;$

Если $k=0$, то $z_0=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{16}}$;

Если $k=1$, то $z_1=\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)/4}=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{9\pi}{16}}$

Если $k=2$, то $z_2=\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)/4}=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{17\pi}{16}}=\sqrt[8]{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}$

Если $k=3$, то $z_3=\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+6\pi\right)/4}=\sqrt[8]{2}e^{i\frac{25\pi}{16}}=\sqrt[8]{2}e^{-i\frac{7\pi}{16}}$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел

1) $z=3$, 2) $z=3i$ 3) $z=-2-2i$

2. Выполнить действия

1) $(3+5i)+(1-2i)$ 2) $(3+5i)-(1-2i)$

3) $(3+5i)\times(1-2i)$ 4) $\dfrac{(3+5i)}{(1-2i)}$

5) $(1+i)^{17}$ 6) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

3. Представить число в тригонометрической и показательной форме

1) $z=3i$ 2) $z=-1+i$ 3) $z=1-i\sqrt{3}$

4. Представить число в алгебраической форме

1) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ 2) $z=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

3) $z=e^{i\pi}$ 4) $z=e^{1+i}$

5. Выполнить действия

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\times 5\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$

3) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

4) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right):\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^8$

6) $\left(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ\right)^{-12}$

7) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

8) $\sqrt[4]{-1}$

6. Представив числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 1 + i$ в показательной форме, выполнить действия

1) $z_1 \cdot z_2$ 2) $\frac{z_1}{z_2}$ 3) $(z_1)^5$ 4) $\sqrt[3]{z_1}$

<u>Практическое занятие № 15 «Табличное интегрирование»</u>

<u>Цель:</u> Приобретение и развитие навыков вычисления неопределенных интегралов с помощью таблицы интегралов и методом замены переменных

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение первообразной, неопределенного интеграла;
2. Свойства неопределенного интеграла
3. Правила интегрирования;
4. Таблицу основных интегралов;
5. Метод замены переменной;
6. Формула интегрирования по частям.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить неопределенный интеграл элементарных функций;
2. Находить интеграл от суммы элементарных и произведения функции на число;
3. Находить неопределенный интеграл методом замены переменных;

Вопросы для актуализации знаний

1. В каком случае применяется линейная замена?
2. Для каких функций используется степенная замена?
3. Для каких случаев используется логарифмическая замена?
4. Перечислите классы функций, которые можно интегрировать по частям.

<u>Указания к решению задач:</u>

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Неопределенный интеграл»
2. Повторить основные формулы интегрирования, таблицу основных интегралов; метод замены переменных;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Нахождение интеграла от степенной функции с отрицательным показателем

Пример: Найти интеграл $\int \frac{1}{x^3}dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило возведения числа в отрицательную степень, привести функцию к виду. $y = x^n$	$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$
2. Найти производную данной функции по формуле $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

2. Нахождение интеграла степенной функции с дробным показателем

Пример 2: Найти интеграл функции $\int \sqrt[5]{x^2}dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило возведения числа в рациональную степень, привести функцию к виду. $y=x^n$	$\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}$
1. Найти интеграл от данной функции по формуле $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int x^{\frac{2}{5}}dx=\frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}+C=\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7}+C$

3. Нахождение интеграла от функции, умноженной на константу

Пример: Найти интеграл $\int\frac{1}{2x^3}dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило дифференцирования $\int a\cdot f(x)dx=a\cdot\int f(x)dx$ вычислить интеграл	$y=\frac{1}{2x^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot x^{-3}$ $\int\frac{1}{2}\cdot x^{-3}dx=\frac{1}{2}\cdot\int x^{-3}dx=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4x^2}+C$

4. Нахождение интеграла от суммы или разности функций

Пример: Найти интеграл от функции $\int\left(3^x+x^5-\sin x\right)dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило интегрирования $\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=$ $=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$ вычислить интеграл от данной функции	$\int\left(3^x+x^5-\sin x\right)dx=\int 3^x dx+\int x^5 dx-$ $-\int\sin xdx=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{x^6}{6}-\cos x+C$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. Вычислить табличные интегралы

1. $\int x\,dx$ 2. $\int 5\,dx$ 3. $\int(2-x)dx$ 4. $\int(x+3)^2dx$

5. $\int\sqrt[3]{x^2}dx$ 6. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ 7. $\int\left(2x^3-3x^2\right)dx$ 8. $\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

9. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2}}$ 10. $\int\left(e^x+5^x\right)dx$ 11. $\int 3\sin xdx$ 12. $\int\frac{dz}{2\sin^2 z}$

13. $\int\frac{dx}{x^2-4}$ 14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ 15. $\int\frac{dx}{3\sqrt{x^2-16}}$ 14. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$

<u>Практическое занятие № 16 «Интегрирование различными методами»</u>

<u>Цель:</u> Приобретение и развитие навыков вычисления неопределенных интегралов с помощью таблицы интегралов и методом замены переменных

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

7. Определение первообразной, неопределенного интеграла;
8. Свойства неопределенного интеграла

9. Правила интегрирования;
10. Таблицу основных интегралов;
11. Метод замены переменной;
12. Формула интегрирования по частям.

Перечень умений, формируемых на занятии:

4. Находить неопределенный интеграл элементарных функций;
5. Находить интеграл от суммы элементарных и произведения функции на число;
6. Находить неопределенный интеграл методом замены переменных;

Вопросы для актуализации знаний

5. В каком случае применяется линейная замена?
6. Для каких функций используется степенная замена?
7. Для каких случаев используется логарифмическая замена?
8. Перечислите классы функций, которые можно интегрировать по частям.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

4. Изучить содержание лекции «Неопределенный интеграл»
5. Повторить основные формулы интегрирования, таблицу основных интегралов; метод замены переменных;
6. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Нахождение интеграла степенной функции с дробным показателем

Пример 2: Найти интеграл функции $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
2. Используя правило возведения числа в рациональную степень, привести функцию к виду. $y = x^n$	$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$
2. Найти интеграл от данной функции по формуле $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$

2. Нахождение интеграла от функции, умноженной на константу

Пример: Найти интеграл $\int \frac{1}{2x^3} dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
2. Используя правило дифференцирования $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ вычислить интеграл	$y = \frac{1}{2x^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot x^{-3}$ $\int \frac{1}{2} \cdot x^{-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \int x^{-3} dx =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4x^2} + C$

3. Нахождение интеграла от суммы или разности функций

Пример: Найти интеграл от функции $\int \left(3^x + x^5 - \sin x\right) dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму

2. Используя правило интегрирования $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$ вычислить интеграл от данной функции	$\int \left(3^x + x^5 - \sin x\right) dx = \int 3^x dx + \int x^5 dx - -\int \sin x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{x^6}{6} - \cos x + C$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интегралы методом замены переменных

1. $\int \sqrt{2x+3} dx$
2. $\int ctg^3 x dx$
3. $\int (3+5x)^4 dx$
4. $\int \sin^6 x dx$
5. $\int \cos^5 x dx$
6. $\int \sin(2x+1) dx$
7. $\int (x+3)^2 dx$
8. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
9. $\int e^{-x} dx$
10. $\int \frac{2^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$
11. $\int e^{\sin x + 1} \cos x dx$
12. $\int tg 3x dx$
13. $\int \frac{x dx}{e^{3x^2+4}}$
14. $\int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx$
15. $\int (x+3)^2 dx$
16. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
17. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$
18. $\int \frac{1-5x}{1+25x^2} dx$
19. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$
20. $\int \sqrt[6]{1-7x^3} x^2 dx$
21. $\int \frac{dx}{4-7x}$

2. Найти интеграл методом интегрирования по частям

1. $\int \ln(x+4) dx$
2. $\int \sqrt{x} \ln x dx$
3. $\int x^2 \ln x dx$
4. $\int \arcsin 2x dx$
5. $\int x^2 \operatorname{arc} tgx dx$
6. $\int x^2 \cos 2x dx$
7. $\int (x^2+4) e^{2x} dx$
8. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

Практическое занятие № 17 «Вычисление определенных и несобственных интегралов»

Цели проведения занятия: Приобретение и развитие навыков вычисления определенных интегралов

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение определенного интеграла;
2. Таблица основных интегралов;
3. Правила интегрирования;
4. Формула Ньютона-Лейбница

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница;
2. Вычисление определенного интеграла различными методами.

Вопросы для актуализации знаний

1. Что называется определенным интегралом?
2. Как применяется методы замены переменных и интегрирования по частям в

определенном интеграле?

<u>**Указания к решению задач:**</u>

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Определенный интеграл, его свойства. Основная формула интегрального исчисления. Интегрирование заменой переменной и по частям в определенном интеграле»
2. Повторить формулу Ньютона-Лейбница, методы интегрирования по частям и замены переменной
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. **Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница**

Пример: Вычислить интеграл $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Найти одну из первообразных подынтегральной функции	Первообразной функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ является функция $F(x)=arctgx$
2. Вычислить значение первообразной $F(x)$ в точках $x=1, x=\sqrt{3}$	$F(1)=arctg1=\frac{\pi}{4}$ $F(\sqrt{3})=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$
3. Вычислить значение определенного интеграла по формуле	$\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=F(\sqrt{3})-F(1)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

2. **Вычисление определенного интеграла методом замены переменной**

Пример: Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$ методом замены переменной

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Выбрать замену переменной	$\cos x = t$
2. Перейти в подынтегральном выражении от переменной x к новой переменной t	$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-t^2$ $dt=-\sin xdx$, откуда $\sin xdx=-dt$ $\sin^3 x=(1-t^2)(-dt)$
3. Найти пределы интеграл по формуле замены переменной в определенном интеграле	$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 xdx=\int\limits_1^0(1-t^2)(-dt)$
4. Вычислить полученный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница	$\int\limits_1^0(1-t^2)(-dt)=\int\limits_0^1(1-t^2)dt=$ $=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big\vert_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

3. **Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям**

Пример: Найти интеграл $\int\limits_1^2 (x+1)e^x dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Представить подынтегральное выражение вида $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$	Полагаем $u = x+1, dv = e^x dx$ Тогда $\int (x+1)e^x dx = \int udv$
2. Найти du и v	$du = d(x+1) = dx$; $v = \int e^x dx = e^x$
3. Применить формулу интегрирования $\int udv = uv - \int vdu$	$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int e^x dx$
4. Найти интеграл $\int vdu$	$\int e^x dx = e^x + C$
5. Подставить результат в найденное выражение	$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x + e^x + C =$ $= e^x(x+2) + C$
	Итого:

Решение можно записать в виде:

$$\int (x+1)\sin x dx = \begin{vmatrix} x+1 = u; dv = e^x dx \\ du = dx; v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= \int udv = uv - \int vdu =$$

$$= (x+1)e^x - \int e^x dx + C = (x+1)e^x - e^x + C = e^x(x+1-1) + C = e^x + C$$

Задания для самостоятельной работы

1.Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница

1. $\int_0^1 (2x-1)^2 dx$ 2. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 3. $\int_1^3 2^x dx$

4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ 5. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$ 6. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$

7. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$ 8. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$ 9. $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx$ 11. $\int_1^3 e^{2x}dx$ 12. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменных

1. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ 2. $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}} \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$ 3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

4. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 5. $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1} \cdot dx$ 6. $\int_0^1 \left(2x^3+1\right)^4 dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx$ 8. $\int_0^1 e^{-2x}dx$ 9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2-1\right)^3 xdx$

10. $\int_0^1 e^{-2x}dx$ 11. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos xdx$ 12. $\int_0^3 \left(9\sqrt{x^3+1}\right)x^2dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$ 14. $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{3}dx$ 15. $\int_{3/4}^{3\sqrt{3}/4} \frac{4dx}{9+16x^2}$

3. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям

1. $\int_0^1 \arcsin xdx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$ 3. $\int_0^1 xe^{-x}dx$

4. $\int_0^1 x\, arctgxdx$ 5. $\int_0^1 (5x+1)e^x dx$ 6. $\int_1^2 x\ln(-x)dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$ 8. $\int_0^1 x\cdot \mathrm{arc}\,tgxdx$ 9. $\int_0^e \ln^2 xdx$

<u>Практическое занятие № 18 «Нахождение области определения и частных производных функции двух переменных».</u>

<u>Цель проведения занятия:</u> Совершенствование и применение умений находить область определения функции двух действительных переменных, находить частные производные и полный дифференциал функций двух действительных переменных.

<u>Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:</u>

1. Определение функции двух действительных переменных, линии уровня;
2. Геометрически смысл частных производных;
3. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух действительных переменных;
4. Правило дифференцирования

<u>Перечень умений, формируемых на занятии:</u>

1. Находить область определения функции двух действительных переменных;
2. Строить линии уровня функции действительных переменных;
3. Решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка;
4. Решать линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка;

<u>Вопросы для актуализации знаний</u>

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?
2. Что называется общим и частным решением, общим и частным интегралом дифференциального уравнения?
3. Перечислите известные вам виды дифференциальных уравнений первого порядка.

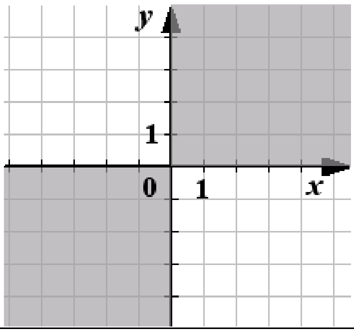
<u>Указания к решению задач:</u>

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Функция двух действительных переменных. Дифференцирование функции двух действительных переменных»;
2. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее в тренинге умений.

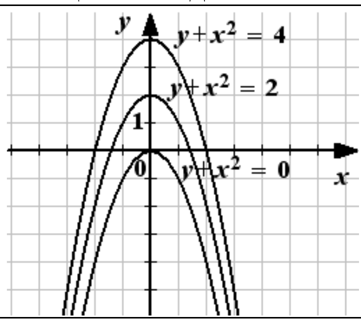
1. Найти и изобразить на координатной плоскости области определения функций:

Пример1. Найти область определения функции $z = \ln(xy)$

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Найти естественную область ь определения данной функции	Т.к. функция представляет собой натуральный логарифм, то $xy > 0$ $xy > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$
2.	Построить границы области определения	Границами области определения являются прямые $x = 0, y = 0$
3.	На координатной плоскости отметить области, которые являются решением системы	

2. Построить линии уровня следующих функций

Пример. Определить и построить линии уровня функции $z = \ln\left(x^2 + y\right)$

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Переписать функцию $z = f(x, y)$ в виде $f(x, y) = C$, где С – произвольная константа	$\ln\left(x^2 + y\right) = C$ Т.к. область определения функции $\left\{(x, y) : x^2 + y > 0\right\}$, то уравнение линий уровня $x^2 + y = const > 0$
2.	Определить тип семейства кривых - линий уровня	Представляет собой семейство парабол, симметричных относительно оси OY и смещенных вдоль нее на величину const
3.	На координатной плоскости построить полученные кривые при различных значениях константы	

3. Найти частные производные первого и второго порядка функций

Пример. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z=\ln\left(x+y^2\right)$

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Зафиксировав значение *y* в функции $z=f\left(x,y\right)$, получить функцию z от переменной *x*.	$z=\ln\left(x+y^2\right)$
2.	Вычислив производную функции z по переменной x, получить $\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$
3.	Зафиксировав значение *x* в функции $z=f\left(x,y\right)$, получить функцию z от переменной *y* и вычислив производную функции *z* по переменной *y*, получить $\frac{\partial z}{\partial y}$.	$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$
4.	Для вычисления $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ зафиксировать в $\frac{\partial z}{\partial x}$ переменную *y* и найти производную по переменной *x*.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=$ $=-\frac{1}{\left(x+y^2\right)^2}$
5.	Для вычисления $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ зафиксировать в $\frac{\partial z}{\partial x}$ переменную *x* и найти производную по переменной *y*.	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right)=$ $=2\frac{x-3y^2}{\left(x+y^2\right)^2}$
6.	Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Так как они равны, то ограничиться вычислением $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. Для этого зафиксировать в $\frac{\partial z}{\partial x}$ переменную y и найти производную по переменной *x*.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right)=$ $=-\frac{2y}{\left(x+y^2\right)^2}$

Задачи для самостоятельного выполнения

1.Найти и изобразить на координатной плоскости области определения функций:

1. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$.
2. $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
3. $z=\ln(-x+y)$.
4. $z=y+\sqrt{x}$
5. $z=\frac{x+2y}{x+y}$

2.Построить линии уровня следующих функций

1. $z=x+y$.
2. $z=x^2+y^2$
3. $z=x^2-y^2$.
4. $z=\frac{y}{x}$
5. $z=\sqrt{xy}$

3.Найти частные производные первого и второго порядка функций

1. $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$. 2. $z = x^3 + y^2 + 2x^2 y$

3. $z = \dfrac{x}{y^2}$ 4. $z = x\sin\left(x+y\right)$

5. $z = \ln\left(x + y^2\right)$ 6. $z = x^y$

7. $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$ 8. $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$

9. $z = \dfrac{3x}{y}$ 10. $z = e^{-\frac{x}{y}}$

11. $z = \dfrac{e^x - e^{-y}}{2}$ 12. $z = x^2 - 2xy + y^2$

13. $z = e^{x^2} + e^{y^2}$ 14. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

15. $z = \left(\sin x\right)^y$ 16. $z = xy + \dfrac{x}{y}$

4.Найти частные производные первого порядка функции z в точке M

1. $z = \dfrac{x-2y}{x+y}$, $M\left(2;-1\right)$ 2. $z = e^{\frac{3x}{y}}$, $M\left(1;1\right)$

3. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, $M\left(2;-2\right)$ 4. $z = \dfrac{y}{x} + x$, $M\left(1;-2\right)$

5.Вычислить полный дифференциал первого порядка функции z в точке M

1. $z = \dfrac{y}{x+y}$, $M\left(2;-1\right)$
2. $z = \sin\left(x^2 + 2y\right)$, при $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$
3. $z = \ln\left(2x + y\right)$, $M\left(1;0\right)$
4. $z = e^{\frac{x}{2y}}$, при $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}1$

6.Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала

1. $\left(1{,}03\right)^{3{,}001}$

Практическое занятие № 19 «Исследование функции двух переменных на экстремум»

Цель проведения занятия: Совершенствование и применение умений находить экстремум функции двух действительных переменных, наибольшее и наименьшее значение функции двух действительных переменных по области

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение экстремума функции двух действительных переменных;
2. Необходимый и достаточный признаки существования экстремума функции двух действительных переменных;
3. Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции двух действительных переменных в области

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить экстремум функции двух действительных переменных;

2. Находить наибольшее и наименьшее значение функции двух действительных переменных по области;

Вопросы для актуализации знаний

1. Что называется экстремумом функции?
2. Перечислите необходимый и достаточный признак существования экстремума в точке;
3. Укажите порядок нахождения наибольшего и наименьшего значения функции двух действительных переменных в области;.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Экстремум функции двух действительных переменных;
2. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Исследование функции на экстремум

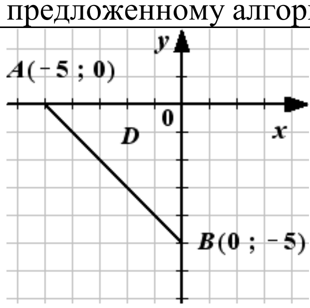
Пример1. Исследовать функцию $z = 1 + 2x - 4y - x^2 - y^2$ на экстремум

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Найти область определения функции	$-\infty < x < \infty$ $-\infty < y < \infty$
2.	Найти частные производные первого порядка от заданной функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$	$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -4 - 2y$
3.	Найти точки, в которой частные производные равны нулю. Приравнять частные производные к нулю и решить систему $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ -4 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ M(1;-2)
4.	Найти все частные производные второго порядка	$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y_2} = -2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$
5.	Вычислить значение частных производных второго порядка в найденной точке	$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2}\Big\vert_{(1;-2)} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y_2}\Big\vert_{(1;-2)} = -2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big\vert_{(1;-2)} = 0$
6.	Подсчитать значение выражения $\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big\vert_{(x_0;y_o)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big\vert_{(x_0;y_o)} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big\vert_{(x_0;y_o)} \right)^2$	$\Delta = (-2)(-2) - 0^2 = 4$
7.	Если $\Delta > 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x_2}\Big\vert_{(x_0;y_0)} < 0$, то данная точка – минимум функции.	Т.к. $\Delta > 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x_2}\Big\vert_{(x_0;y_0)} < 0$ - то данная точка является минимумом функции

	Если $\Delta > 0$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x_2}\|_{(x_0;y_0)} > 0$, то данная точка – максимум функции. Если $\Delta < 0$, то экстремума нет. Если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть	

2. **Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции в области**

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкнутом треугольнике D, ограниченном осями координат и прямой $x + y + 5 = 0$

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Сделать чертеж области D	
2.	Найти стационарные точки, лежащие внутри D. Вычислить частные производные, приравнять их к нулю и найти решение полученной системы	$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y + 2$ $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases},$ $M(-2;-1)$, $z(M) = z(-2;-1) = -3$
3.	Исследовать функцию на границе области. Подставить в функцию уравнение границы и найти наименьшее и наибольшее значение полученной функции одной переменной – параметра, к которому отнесены линии, ограничивающие область *D*	1. На оси OX: $y = 0, z = x^2 + 3x + 1(-5 \le x \le 0)$ $\frac{dy}{dx} = 2x + 3, 2x + 3 = 0, x = -\frac{3}{2}$ $z\left(-\frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{5}{4},$ $z(5,0) = 11,\ z(0,0) = 1$ $z_{\text{íàèá}(OA)} = 11,\ z_{\text{íàèì}\ (OA)} = -\frac{5}{4}$ 2. На оси OY: $x = 0, z = 2y^2 + 2y + 1(-5 \le y \le 0)$ $\frac{dy}{dy} = 4y + 2, 4y + 2 = 0, y = -\frac{1}{2}$ $z\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ z(0,-5) = 41,\ z(0,0) = 1$ $z_{\text{íàèá}(OB)} = 41,\ z_{\text{íàèì}\ (OB)} = \frac{1}{2}$ 4. На отрезке прямой AB:

		$x+y+5=0,\ z=4x^2+26x+41\left(-5\le x\le 0\right)$ $\frac{dy}{dy}=8x+26, 8x+26=0, x=-\frac{13}{4}$ $y=-\left(-\frac{13}{4}\right)-5=-\frac{7}{4}$ $z\left(-\frac{13}{4},-\frac{7}{4}\right)=-\frac{5}{4},\ \ z\left(-5,0\right)=11,\ \ z\left(0,-5\right)=41$ $z_{\text{í àèá}(AB)}=41,\ \ z_{\text{í àèì}\ (AB)}=-\frac{5}{4}$
5.	Сравнить все вычисленные значения функции в отдельных точках и найти среди них наименьшее и наибольшее, которые и будут соответственно наибольшим и наименьшим значением функции в области D	$z_{\text{í àèá}}=z\left(0;-5\right)41,$ $z_{\text{í àèì}}=z\left(-2;1\right)=-3$,

Задачи для самостоятельного решения

1. **Исследовать функцию на экстремум:**

1. $z=x^2+\left(y-1\right)^2$.
2. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$
3. $z=x^2-\left(y-1\right)^2$.
4. $z=x^3+y^3-3xy$
5. $z=\frac{x+2y}{x+y}$

2. **Определить наибольшее и наименьшее значение функции в области**

1. $z=x^2+2xy-4x+8$ в прямоугольнике, ограниченном линиями $x=0, y=0,\ \ x=1, y=2$
2. $z=x-2y-3$ в треугольнике, ограниченном линиями $x=0, y=0,\ y=1-x$.
3. $z=x^2-xy+y^2$ в области $\left|x\right|+\left|y\right|\le 1$
4. $z=x^2-y^2$ в круге $x^2+y^2\le 4$

Практическое занятие № 20 «Нахождение двойного интеграла по области»

Цель проведения занятия: Совершенствование и применение умений вычислять двойные интегралы по заданной области

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение двойного интеграла;
2. Основные свойства двойного интеграла;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Вычислять двойные интегралы от функции двух действительных переменных по заданной области;

Вопросы для актуализации знаний

1. Дайте определение двойного интеграла;
2. Дайте определение области, правильной относительно оси *OX* и *OУ*;
3. Укажите порядок вычисления двойного интеграла по области.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

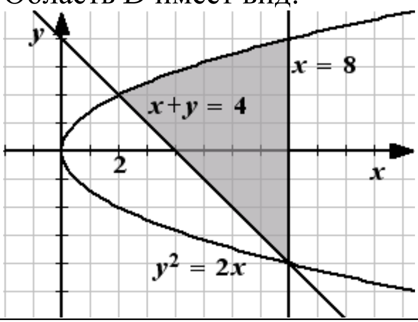
1. Изучить содержание лекции «Двойные интегралы и их свойства. Повторные интегралы. Сведение двойных интегралов к повторным. Приложения двойных интегралов»;
2. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

1. **Вычисление двойного интеграла**

Пример: Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где D – область, ограниченная кривыми $y^2=2x$, $x+y=4$ и $x=8$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Нарисовать область интегрирования	Находим точки пересечения параболы и прямых: $\begin{cases} y^2=2x \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ x=8$ Область D имеет вид: 
2.	Представить двойной интеграл в виде повторного, определив порядок интегрирования и расставив пределы интегрирования	$\iint\limits_D (x+y)dxdy - \int\limits_2^8 dx \int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)\,dy$
3.	Вычислить повторный интеграл	$\int\limits_2^8 dx \int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)\,dy = \int\limits_2^8 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg\|_{4-x}^{\sqrt{2x}} dx =$ $= \int\limits_2^8 \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} + x - 8 \right) dx =$ $= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} - 8x \right)_2^8 = 165,2$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить двойной интеграл

1. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 25x^4y^4\right) dx\,dy;$
$D:\ x=1,\ y=x,\ y=-x^2.$

2. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4\right) dx\,dy;$
$D:\ x=1,\ y=x,\ y=-x^3.$

3. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 25x^4y^4\right) dx\,dy;$
$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-x.$

4. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right) dx\,dy;$
$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-x.$

5. $\iint\limits_D \left(xy - 9x^5y^5\right) dx\,dy;$ $D:\ x = 1,\ y = x,\ y = -x^2.$

6. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right) dx\,dy;$ $D:\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -x.$

Практическое занятие № 21 «Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными.»

Цель проведения занятия: Совершенствование и применение умений решать дифференциальные уравнения 1-го порядка

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение обыкновенного дифференциального уравнения,
2. Определение общего и частного решения (интеграла) дифференциального уравнения, геометрическое представление решений;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Решать обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными;
2. Решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка;

Вопросы для актуализации знаний

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?
2. Что называется общим и частным решением, общим и частным интегралом дифференциального уравнения?
3. Перечислите известные вам виды дифференциальных уравнений первого порядка.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Определение обыкновенных дифференциальных уравнений. Общее и частное решения. Уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными».
2. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее в тренинге умений.

1. Решение дифференциального уравнения первой степени с разделяющимися переменными

Задание

Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$xydx + (x+1)dy = 0$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Записать уравнение в виде $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ и зафиксировать функции $f_1(x),\ g_1(y),$ $f_2(x),\ g_2(y)$	$xydx + (x+1)dy = 0$ $f_1(x) = x;\ g_1(y) = y$ $f_2(x) = (x+1);\ g_2(y) = 1$
2.	Найти решение уравнений $g_1(y) = 0$ и $f_2(x) = 0$	$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1,$ $g_1(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0.$

3.	Зафиксировать решения уравнения вида $x=x_0,\ y=y_0$.;	$x=-1$ и $y=0$ - решения исходного дифференциального уравнения
4.	Разделить переменные в областях, где $f_2(x)\cdot g_1(y)\neq 0$, записав уравнение в виде $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0$	$\dfrac{x}{(x+1)}dx+\dfrac{1}{y}dy=0$ при $(x+1)y\neq 0$
5.	Найти первообразные $F(x)$ для функций $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ и $G(x)$ для $g(y)=\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}$ с помощью неопределенного интегрирования	$F(x)=\int\dfrac{x}{x+1}dx=\int\dfrac{(x+1)-1}{x+1}dx=$ $\int\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int 1\cdot dx-\int\dfrac{dx}{x+1}=$ $x-\int\dfrac{d(x+1)}{x+1}=x-\ln\lvert x+1\rvert+C_1$; $G(y)=\int\dfrac{dy}{y}=\ln\lvert y\rvert+C_2$.
6.	Опустив C_1 и C_2, записать общий интеграл уравнения в виде $\varphi(x;y)=F(x)+G(y)+C$ в областях, где $f_2(x)\cdot g_1(y)\neq 0$	$\varphi(x;y)=x-\ln\lvert x+1\rvert+\ln\lvert y\rvert+C$ в областях, где $(x+1)y\neq 0$
7.	Выяснить, не входят ли в общий интеграл при каких-то значениях С ранее найденные решения вида $x=x_0,\ y=y_0$.;	Так как $\ln\lvert x+1\rvert$ $\grave{e}$ $\ln\lvert y\rvert$ не определены при $x=-1$ и $y=0$ соответственно, то решения $x=-1$ и $y=0$ ни при каких С не входят в общий интеграл $\varphi(x;y)=C$
8.	Выписать все решения исходного дифференциального уравнения	Множество всех решений дифференциального уравнения $xydx+(x+1)dy=0$ то есть $\left\{\begin{array}{l} x+\ln\lvert x+1\rvert+\ln\lvert y\rvert=C,\ \text{ï ðè}\ (x+1)y\neq 0; \\ \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ y=0. \end{array}\right. \end{array}\right.$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1) **Решите дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными ;**

1. $y^2dx+(x-2)dy=0$
2. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$
3. $y^2dx=e^xdy$
4. $x^2dy-(2xy+3y)dx=0$
5. $(1+y^2)dx=xdy$
6. $ydx=xdy$
7. $(1+x)ydx-(1-y)xdy=0$
8. $(x^2-yx^2)\dfrac{dy}{dx}+y^2+xy^2=0$

2) **Найти частные решения (интегралы), удовлетворяющие начальным условиям**

1. $ydy=xdx;\ y(-2)=4$
2. $xdy=ydx;\ y(2)=6$
3. $dy=(3x^2-2x)dx;\ y(2)=4$
4. $(1+y)dx=(1-x)dy;\ y(-2)=3$
5. $(1+x)ydx=(1-y)xdy;\ y(1)=1$

Практическое занятие № 22 «Решение линейных и однородных дифференциальных уравнений первого порядка»

Цель проведения занятия: Совершенствование и применение умений решать дифференциальные уравнения 1-го порядка

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

3. Определение обыкновенного дифференциального уравнения,
4. Определение общего и частного решения (интеграла) дифференциального уравнения, геометрическое представление решений;

Перечень умений, формируемых на занятии:

3. Решать линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка;

Вопросы для актуализации знаний

4. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?
5. Что называется общим и частным решением, общим и частным интегралом дифференциального уравнения?
6. Перечислите известные вам виды дифференциальных уравнений первого порядка.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

3. Изучить содержание лекции «Однородные уравнения 1-го порядка. Уравнения, приводящиеся к однородным. Линейные однородные и неоднородные уравнения 1-го порядка»
4. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее в тренинге умений.

2. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Задание

Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Выяснить, является ли данное уравнение $f(x;y)dx = g(x;y)dy$ линейным уравнением: оно должно иметь вид $y' + f(x;y)y + g(x,y) = 0$	Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первой степени, где $f(x;y) = \frac{2}{x+1}$ и $g(x;y) = -(x+1)^3$
2.	Сделать замену переменных $y = u \cdot v$, где $u(x)$ *è* $v(x)$ - новые функции от *x*. Продифференцировав замену $y' = u'v + v'u$, подставить в уравнение $y = u \cdot v$ и $y' = u'v + v'u$.	$y = uv$; $y' = u'v + v'u$; $u'v + v'u + \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$; $u'v + u\left(v' + \frac{2}{x+1}v\right) = (x+1)^3$

3.	Выбрать функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в 0	$v'+\frac{2}{x+1}v=0$; $\frac{dv}{dx}+\frac{2v}{x+1}=0$;
4.	Разделяя переменные , получить функцию $v(x)$	$\frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x+1}$; $\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{2dx}{x+1}$; $\ln v=-2\ln(x+1)$; $v=(x+1)^{-2}=\frac{1}{(x+1)^2}$
5.	Записать выражение с учетом полученной функции $v(x)$ и, интегрируя, получить функцию $u(x)$.	$\frac{u'}{(x+1)^2}=(x+1)^3$; $\frac{du}{dx}=(x+1)^5$; $du=(x+1)^5\,dx$; $\int du=\int(x+1)^5\,dx$ $u=\frac{(x+1)^6}{6}+C$;
6.	Получить функцию $y=u\cdot v$	$y=\frac{(x+1)^6}{6}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^4}{6}$

2. Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка

Задание

Решить однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(x+y)dx-xdy=0$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Выяснить, является ли данное уравнение $f(x;y)dx=g(x;y)dy$ однородным уравнением: $f(x;y)$ и $g(x;y)$ должны быть однородными функциями одинаковой степени	Данное уравнение является однородным уравнением первой степени, так как $f(x;y)=x+y$ и $g(x;y)=x$ являются однородными функциями первой степени, следовательно, данное уравнение является однородным уравнением первой степени относительно переменных x и y
2.	Сделать замену переменных $y=vx$, где $v(x)$ - новая функция от x. Подставить в уравнение замену $y=vx$ и $dy=xdv+vdx$ Сделать преобразования и получить уравнение с разделяющимися переменными.	$y=vx$; $dy=xdv+vdx$; $(x+vx)dx-x(xdv+vdx)=0$; $xdx+vxdx-x^2dv-vxdx=0$; $xdx-x^2dv=0$; $dx-xdv=0$;

3.	Разделить переменные, проинтегрировать уравнение с разделенными переменными и получить функцию $v(x)$	$\frac{dx}{x}-dv=0$; $\int\frac{dx}{x}=\int dv$; $v=\ln\lvert x\rvert+\ln C$; $v=\ln\lvert Cx\rvert$.
4.	Заменяя в полученном выражении $v(x)$ на $\frac{y}{x}$, получить общее решение уравнения	$\frac{y}{x}=\ln\lvert Cx\rvert$; $y=x\cdot\ln\lvert Cx\rvert$

Задания для самостоятельной работы

1) **Решите линейное дифференциальное уравнение первого порядка ;**

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}-\frac{2y}{x}$
2. $\frac{dy}{dx}=2y+3$
3. $\frac{dy}{dx}=x+xy$
4. $\frac{dy}{dx}=x-xy$
4. $\frac{dy}{dx}=y+1$
6. $x\frac{dy}{dx}=x^2-2y$

2) **Найти частные решения (интегралы), удовлетворяющие начальным условиям**

1. $\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=0,\ y(0)=3$
2. $\frac{dy}{dx}-\frac{3y}{x}=e^x x^3,\ y(1)=e$
3. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2},\ y(2)=1$

3) **Решите однородное дифференциальное уравнение первого порядка ;**

1. $(x+y)dx+xdy=0$
2. $(x+y)dx+(y-x)dy=0$
3. $(x-y)dx+(y+x)dy=0$
4. $(x-y)dx+xdy=0$
5. $(x-y)dy-ydx=0$
6. $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$

4) **Найти частные решения (интегралы), удовлетворяющие начальным условиям**

1. $(x-y)dx+xdy=0;\ y(1)=0$
2. $(2\sqrt{xy}-y)dx+xdy=0,\ y(1)=0$

Практическое занятие № 23 «Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами».

Цель проведения занятия: Совершенствование и применение умений решать дифференциальных уравнения 2-го порядка

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. определение обыкновенного дифференциального уравнения,
2. определение общего и частного решения дифференциального уравнения, геометрическое представление решений;
3. понятие порядка дифференциального уравнения;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. решать неполные дифференциальные уравнения второго порядка

2. решать однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами,
3. решать неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами для некоторых видов правой части.

Вопросы для актуализации знаний

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением второго порядка?
2. Что называется общим и частным решением, общим и частным интегралом дифференциального уравнения?
3. Перечислите известные вам виды дифференциальных уравнений второго порядка

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Дифференциальное уравнения 2-го порядка»;
2. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Решение неполного дифференциального уравнения второго порядка

Задание

Найти частное решение неполного дифференциального уравнения второго порядка $y''=6x$, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$y=2$ при $x=0$, $y=3$ при $x=1$

Решение:

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Полагая $\frac{dy}{dx}=z$, переписать уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x;y;\frac{dy}{dx}\right)$в виде $\frac{dz}{dx}=f\left(x;y;\frac{dy}{dx}\right)$, проинтегрировать и получить функцию z	$\frac{d^2y}{dx^2}=6x$; $\frac{dy}{dx}=z$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}=6x$; $dz=6xdx$ $\int dz=\int 6xdx$ $z=\frac{6x^2}{2}+C_1=3x^2+C_1$
2.	Учитывая, что $z=\frac{dy}{dx}$, еще раз интегрировать и найти общее решение данного уравнения	$z=\frac{dy}{dx}=3x^2+C_1$; $dy=\left(3x^2+C_1\right)dx$ $\int dy=\int\left(3x^2+C_1\right)dx$ $y=\frac{3x^3}{3}+C_1x+C_2=x^3+C_1x+C_2$
3.	Найти частное решение уравнения. Подставляя в общее решение начальные данные, получить систему уравнений и решить её	$\begin{cases}2=C_2\\3=1+C_1+C_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=2\\C_1=3-1-C_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=2\\C_1=0\end{cases}$ $y=x^3+2$

2. Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

Задание

Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''-10\cdot y'+25\cdot y=0$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Зафиксировать значения p и q Составить характеристическое уравнение $r^2+pr+q=0$, которое получается из исходного уравнения заменой y'' на r^2, y' на r .	p=-10; q=25; $r^2-10r+25=0$; $r_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot 25}}{2}=\frac{10}{2}=5$;
2.	Если характеристическое уравнение имеет два действительных корня r_1 и r_2, то записать общее решение уравнения в виде: $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$; Если характеристическое уравнение имеет один действительный корень r, то записать общее решение уравнения в виде: $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{rx}$; Если характеристическое уравнение имеет два комплексных корня $r_1=\alpha+\beta i$ и $r_2=\alpha-\beta i$, то записать общее решение уравнения в виде: $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$;	Характеристическое уравнение имеет один действительный корень $r=5$, следовательно $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{5x}$;

3. **Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка** $y''+py'+qy=f\left(x\right)$ **для правой части вида** $f\left(x\right)=e^{kx}P_n\left(x\right)$

Задание

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+4y=e^x\left(x-1\right)$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Зафиксировать значения *p*, *q*, *k*, *P*(*x*) Найти общее решение однородного уравнения $y''+py'+qy=0$ Составить характеристическое уравнение $r^2+pr+q=0$, которое получается из исходного уравнения заменой y'' на r^2, y' на r .	*p*=0; *q*=4; *k*=1; *P*(*x*)=*x* – 1 $r^2+4=0$; $r_{1,2}=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$;
2.	В зависимости от решения характеристического уравнения записать общее решение дифференциального уравнения в виде $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$, $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{rx}$ или	Характеристическое уравнение имеет два комплексных корня $r_{1,2}=\pm 2i$, следовательно $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$;

	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$;	
3.	Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения в виде $u=e^{kx}Q_n\left(x\right)$, где $Q_n\left(x\right)$ - многочлен той же степени, что и стоящий в правой части уравнения. Обозначим его v Т.к. u – решение уравнения, то при подстановке его в уравнение должно получиться тождество Найдем u', u''	Будем искать частное решение неоднородного линейного уравнения в виде $u=e^x\left(Ax+B\right)$. Найдем коэффициенты A и B Положим $Ax+B=v$ Тогда $u=e^xv$ $u'=e^xv+e^xv'=e^x\left(v+v'\right)$ $u''=\left(e^x\left(v+v'\right)\right)'=$ $=e^x\left(v+v'\right)+e^x\left(v'+v''\right)$
4.	Подставить u, u', u'' в исходное уравнение вместо y, y', y''	$e^x\left(v+v'\right)+e^x\left(v'+v''\right)+4e^xv=$ $=e^x\left(x-1\right)$ $e^x\left(v+2v'+v''+4v\right)=e^x\left(x-1\right)$ $5v+2v'+v''=x-1$
5.	Найти v', v'' и подставим в уравнение п.4 . Найти коэффициенты A и B Найти частное решение неоднородного уравнения	$v'=A$; $v''=0$ $5\left(Ax+B\right)+2A=x-1$ $5Ax+5B+2A=x-1$ $\begin{cases}5A=1\\2A+5B=-1\end{cases} \begin{cases}A=\frac{1}{5}\\B=-\frac{7}{25}\end{cases}$ $u=\frac{1}{5}x-\frac{7}{25}$
6.	Записать общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения	$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$ $+\frac{1}{5}e^x\left(x-\frac{7}{25}\right)$

4. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y''+py'+qy=f\left(x\right)$ для правой части вида $f\left(x\right)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$

Задание

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''-5y'+6y=16\cos2x+28\sin2x$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Зафиксировать значения p,q,a,b, λ. Найти общее решение однородного уравнения $y''+py'+qy=0$	p= -5; q=6; a=16, b=28, $\lambda=2$; $r^2-5r+6=0$; $r_1=3$; $r_2=2$

	Составить характеристическое уравнение $r^2+pr+q=0$, которое получается из исходного уравнения заменой y'' на r^2, y' на r .	
2.	В зависимости от решения характеристического уравнения записать общее решение дифференциального уравнения в виде $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$, $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$ или $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;	Характеристическое уравнение имеет два действительных корня, следовательно $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$;
3.	Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения в виде $u=A\cos\omega x+B\sin\omega x$. Т.к. u – решение уравнения, то при подстановке его в уравнение должно получиться тождество Найдем u', u''	Будем искать частное решение неоднородного линейного уравнения в виде $u=A\cos 2x+B\sin 2x$. Найдем коэффициенты A и B $u'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$ $u''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$
4.	Подставить u, u', u'' в исходное уравнение вместо y, y', y'' Найти частное решение неоднородного уравнения	$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+10A\sin 2x-$ $-10B\cos 2x+6A\cos 2x+6B\sin 2x=$ $=16\cos 2x+28\sin 2x$ $\begin{cases}2A-10B=16\\2B+10A=28\end{cases}$ $\begin{cases}A=3\\B=-1\end{cases}$ $u=3\cos 2x-\sin 2x$
5.	Записать общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения	$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+3\cos 2x-\sin 2x$

Задания для самостоятельной работы

1. **Найти решение неполного дифференциальное уравнение второго порядка ;**

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ 2. $\dfrac{d^2s}{dt^2}=6t$ 3 . $\dfrac{d^2\theta}{d\omega^2}=\omega^2$

2. **Найти частные решения уравнения при заданных начальных условиях**

1. $\dfrac{d^2s}{dt^2}=18t+2,\ s(0)=5$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2\dfrac{dy}{dx},\ y(0)=\dfrac{3}{2},\ y'(0)=1$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dx},\ y(0)=2,\ y'(0)=1$

3. **Решить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами ;**

1. $y''+y'-6y=0$ 2. $y''-8y'+15y=0$

3. $y''+5y'+6y=0$ 4. $y''-2y'-3y=0$

5. $y''-6y'+9y=0$ 6. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-6y=0$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=0$ 8. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$

9. $\frac{d^2y}{dx^2}-9y=0$ 10. $\frac{d^2y}{dx^2}-16y=0$

11. $y''+2y'+9y=0$ 12. $y''+10y'+25y=0$

13. $y''-6y'+25y=0$ 14. $y''-6y'+13y=0$

4. **Найти частные решения уравнения при заданных начальных условиях**

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0;\ y(0)=2,\ y'(0)=0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0;\ y(0)=8,\ y'(0)=0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-20=0;\ y(0)=\frac{9}{5},\ y'(0)=0$
4. $y''-10y'+25y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$
5. $y''+6y'+9y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$
6. $y''+9y=0,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-6$
7. $y''-4y'+5y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$

5. **Решить неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами .**

1. $y''-y=5x+2$ 2. $y''-7y'+12y=x$ 3. $y''+6y'+5y=e^{2x}$

4. $y''-4y'+4y=\sin x$ 5. $y''+9y'=x^2$

<u>Практическое занятие № 24 «Исследование сходимости числового ряда».</u>

<u>Цель проведения занятия:</u> Формирование и совершенствование умений определять сходимость знакочередующихся и знакопеременных рядов.

<u>Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:</u>

1. Определение ряда, частичных сумм ряда, суммы ряда, обобщенного гармонического ряда, геометрического ряда, знакопеременного и знакочередующегося ряда. Признак Лейбница;

<u>Перечень умений, формируемых на занятии:</u>

1. Исследовать сходимость знакочередующегося и знакопеременного ряда с помощью ряда с помощью признака Лейбница;

<u>Вопросы для актуализации знаний</u>

1. Что называется рядом, частичной суммой ряда?
2. Что называется условной, абсолютной сходимостью знакопеременного ряда?
3. Назовите признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда;

<u>Указания к решению задач:</u>

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекций «Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость»
2. Повторить необходимые и достаточные признаки сходимости числовых рядов (Приложение 8);
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее в тренинге умений.

1. **Исследовать знакочередующийся числовой ряд на абсолютную и условную сходимость**

Задание

Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^3-n+3}$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Составить ряд, состоящий из абсолютных величин данного ряда .	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-n+3}$
2.	Исследовать сходимость полученного ряда с помощью необходимого признака и достаточных признаков сходимости знакоположительных рядов	Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-n+3}$ со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Имеем $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3-n+3}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)}{n^3-n+3}=1$
3.	Сделать вывод об абсолютной сходимости ряда, используя правило: если ряд, составленный из абсолютных членов сходится, то сходится и исходный ряд	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-n+3}$ сходится, значит, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^3-n+3}$ сходится.
4.	Если данный ряд не сходится абсолютно, то сделать вывод об условной сходимости ряда, используя правило: если члены исходного ряда монотонно убывают по абсолютной величине и предел общего члена равен нулю, то исходный ряд условно сходится	

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1) **Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость;**

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5\cdot n^4+2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n^2+3}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{2n+5}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n\cdot\ln^4 n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^{n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^{n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\ln n}{n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$

15. $\frac{3}{2}-\frac{3\cdot5}{2\cdot5}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot5\cdot8}-...+(-1)^{n-1}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot...\cdot(3n-1)}+...$

16. $\frac{1}{7}-\frac{1\cdot4}{7\cdot9}+\frac{1\cdot4\cdot7}{7\cdot9\cdot11}-...+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot...\cdot(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdot...\cdot(2n+5)}+...$

17. $\frac{\sin\alpha}{\ln10}+\frac{\sin2\alpha}{(\ln10)^2}+\frac{\sin3\alpha}{(\ln10)^3}-...+\frac{\sin n\alpha}{(\ln10)^n}+...$

<u>Практическое занятие № 25 «Нахождение области сходимости функционального ряда..»</u>

<u>Цель проведения занятия:</u> Формирование и совершенствование умений определять радиус и область сходимости степенных рядов, разлагать функцию в ряд Мак-Лорена.

<u>Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:</u>

1. Определение функционального ряда, степенного ряда;
2. Понятие радиуса и области сходимости степенного ряда;
3. Формула Тейлора разложения функции в ряд;
4. Формула Мак-Лорена разложения функции в ряд;

<u>Перечень умений, формируемых на занятии:</u>

1. Находить радиус и область сходимости степенного ряда;
2. Раскладывать функцию в ряд Мак-Лорена;

<u>Вопросы для актуализации знаний</u>

1. Что называется функциональным рядом, радиусом сходимости, областью сходимости ряда;
2. Назовите Формулу Мак-Лорена для разложения функции в ряд;

<u>Указания к решению задач:</u>

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Функциональные ряды»;
2. Повторить формулы для вычисления области, радиуса сходимости, формулу Мак-Лорена (Приложение 8);

1. **Нахождение интервала сходимости степенного ряда**

Задание

Найти интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение на границах интервала сходимости $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n+5)(2n+1)}$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Составить ряд, состоящий из абсолютных величин данного ряда .	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lvert x-1\rvert^n}{(3n+5)(2n+1)}$
2.	Применить признак Даламбера, получить радиус и интервал сходимости	$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lvert x-1\rvert^{n+1}}{(3n+8)(2n+3)}:\frac{\lvert x-1\rvert^n}{(3n+5)(2n+1)}\right)=$ $=\lvert x-1\rvert\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+5)(2n+1)}{(3n+8)(2n+3)}=\lvert x-1\rvert<1$ $I:0<x<2$

3.	Исследовать поведение степенного ряда на границах интервала сходимости	$x=2:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+5)(2n+1)}$, сравним полученный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n+5)(2n+1)}=\frac{1}{6}$, значит, ряд сходится $x=0:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+5)(2n+1)}$. Т.к. ряд из абсолютных величин сходится, то сходится и данный знакочередующийся ряд
4.	Подвести итог исследования	Данный ряд сходится на промежутке $0\le x\le 2$

2. **Разложение функции в ряд Мак-Лорена;**

Задание

Разложить функцию $f(x)=\sin x$ в ряд Мак-Лорена

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Найти производные функции $f(x)$: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ $f^{(\mathrm{IV})}(x)$, и т.д.	$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(\mathrm{IV})}(x)=\sin x$, $f^{(\mathrm{V})}(x)=\cos x$, $f^{(\mathrm{VI})}(x)=-\sin x$, …, $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$,
2.	Найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ и т.д.	$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(\mathrm{IV})}(0)=0$, $f^{(\mathrm{V})}(0)=1$, …, $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$, $f^{(2n)}(0)=0$
3.	Подставить полученные значения в формулу ряда Мак-Лорена.	$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+$ $+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$

Задачи для самостоятельного решения

1. **Найти интервал сходимости функционального ряда:**

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)^2}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n\sin x}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^n}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)$

2. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$ 5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n+1)^2 x^n$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{5^n\sqrt[5]{n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-2)^n}{n^2\cdot\ln n}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+2)^n}{n^2\cdot\ln n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n^2}$

3. Разложить функцию в ряд Мак-Лорена

1. $y=a^x$ 2. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 3. $y=\cos(x+a)$

4. $y=\sin^2 x$ 5. $y=\ln(2+x)$ 6. $y=\cos^2 x$

7. $y=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$ 8. $y=xe^{-2x}$ 9. $y=e^{x^2}$

10. $y=\cos 2x$ 11. $y=\frac{x}{9+x^2}$ 12. $y=\sin 3x+x\cos 3x$

Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Каждому обучающемуся обеспечен доступ к следующим электронным библиотечным системам и профессиональным базам данных:

- ЭБС «Университетская библиотека онлайн».

Электронная библиотека ежегодно обновляется и пополняется.